Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Una introducción con SAGE

José M. Gallardo

Versión 1.1 – Mayo de 2012

Este documento se distribuye bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España. Para ver una copia de esta licencia, visite `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/`.

ÍNDICE

Prefacio VII

1. El concepto de ecuación diferencial **1**
1.1. Introducción: algunos modelos 1
1.1.1. Movimiento de un cuerpo en caída libre 1
1.1.2. Un problema geométrico 5
1.1.3. Desintegración radiactiva 7
1.1.4. Un problema de mezclas 8

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden **11**
2.1. Introducción 11
2.2. Ecuaciones de variables separables 13
2.3. Ecuaciones lineales 17
2.4. Ecuaciones exactas 23
2.5. Factores integrantes 28
2.6. Problemas de valor inicial 33
2.7. Aplicaciones 38
2.7.1. Espejos parabólicos 38
2.7.2. Campos de fuerza conservativos 41
2.7.3. Calentamiento de edificios 46

3. Ecuaciones diferenciales de orden superior **51**
3.1. Introducción 51
3.2. Ecuaciones reducibles a primer orden 54

3.2.1. Ecuaciones en las que no aparece la variable dependiente 54
3.2.2. Ecuaciones en las que no aparece la variable independiente . . . 57
3.3. Ecuaciones lineales de segundo orden 58
3.4. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes 62
3.5. Método de variación de las constantes 65
3.6. Método de coeficientes indeterminados 69
3.7. Problemas de valores iniciales y de contorno 77
3.8. Ecuaciones lineales de orden superior 79
3.9. Aplicaciones 86
3.9.1. Vibraciones mecánicas 86
3.9.2. Deflexión y pandeo de vigas 95

4. Sistemas de ecuaciones diferenciales **101**
4.1. Introducción 101
4.2. Método de sustitución 106
4.3. Método de autovalores 111
4.4. Teoría geométrica: el diagrama de fases 118
4.5. Aplicaciones 133
4.5.1. Calentamiento de edificios 133
4.5.2. Más sobre vibraciones mecánicas 136
4.5.3. El péndulo amortiguado 140

5. Métodos numéricos para problemas de valor inicial **143**
5.1. Introducción 143
5.2. El método de Euler 145
5.3. Métodos de orden superior 154
5.3.1. Método de Heun o de Euler mejorado 155
5.3.2. Método del punto medio 158
5.3.3. Método de Runge-Kutta de cuarto orden 160
5.4. Algunas consideraciones 164
5.5. Aplicaciones 167
5.5.1. Deflexión de vigas en voladizo 167
5.5.2. El péndulo perturbado 170

6. Métodos numéricos para problemas de contorno **175**
6.1. Introducción 175
6.2. Método de diferencias finitas 176
6.3. Aproximación variacional 182
6.4. Método de elementos finitos 186
6.5. Algunos comentarios 195
6.6. Aplicaciones 195

6.6.1. Deflexión de vigas empotradas 195

Bibliografía Complementaria **201**

PREFACIO

No voy a descubrir la pólvora si digo que las *ecuaciones diferenciales* constituyen una parte fundamental de las Matemáticas, tanto desde un punto de vista puramente teórico como desde un enfoque más aplicado; por ello, es fundamental su estudio en todas las carreras científicas y técnicas. En este trabajo recojo de forma ordenada el contenido un tanto desordenado que he venido impartiendo en los últimos años a estudiantes de Ingeniería Química y Arquitectura.

Existen muy buenos libros sobre ecuaciones diferenciales en el mercado, por lo que sería presuntuoso añadir uno nuevo sin aportar la más mínima novedad. La de este consiste en la utilización del programa Sage para la resolución, tanto simbólica como numérica, de los ejemplos propuestos. Dicho programa constituye una alternativa de software libre a paquetes como `Matlab`, `Maple` o `Mathematica`. Para más información sobre Sage y una introducción a su manejo básico, cuyo conocimiento asumiré por parte del lector, recomiendo visitar la página web del proyecto: `www.sagemath.org`. En un futuro puede que escriba un capítulo de introducción al manejo de Sage; mientras tanto, en la página web referenciada pueden encontrarse multitud de trabajos útiles.

Este libro está en constante proceso de revisión, por lo que todo tipo de sugerencias y correcciones serán bienvenidas, o no, a: `jmgallardo@uma.es`.

José M. Gallardo
Profesor Titular de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

CAPÍTULO

1

EL CONCEPTO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

1.1. Introducción: algunos modelos

Para ilustrar el concepto de ecuación diferencial y su relación con distintas ramas de las ciencias, vamos a analizar en este apartado una serie de problemas prácticos donde las ecuaciones diferenciales surgen de forma natural. Aprovecharemos para introducir algunas definiciones que formalizaremos más adelante.

1.1.1. Movimiento de un cuerpo en caída libre

Consideremos un cuerpo de masa m que se deja caer verticalmente desde una altura h, sin velocidad inicial, y bajo el único efecto de la gravedad. Queremos determinar la posición del cuerpo en cada instante de tiempo t, así como el tiempo que tardará en llegar al suelo.

La ley física que determina el comportamiento del sistema bajo estudio es la *segunda ley de Newton*:

$$ma = \Sigma \vec{F}, \tag{1.1}$$

donde a representa la aceleración y $\Sigma \vec{F}$ es la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Debemos tener en cuenta que cada fuerza es una magnitud vectorial, es

decir, tiene dirección y sentido, por lo que a la hora de traducir la ecuación (1.1) a una forma más manejable debemos establecer un sistema de referencia adecuado. Vamos a plantear el problema utilizando dos sistemas de referencia distintos: observaremos que la ecuación a resolver en cada caso será diferente (ya que las variables significarán cosas distintas en cada planteamiento), aunque la interpretación física de la solución obtenida será la misma en ambos casos.

Consideremos el sistema de referencia de la figura 1.1, donde el origen se encuentra en el suelo y el sentido positivo del movimiento es hacia arriba.

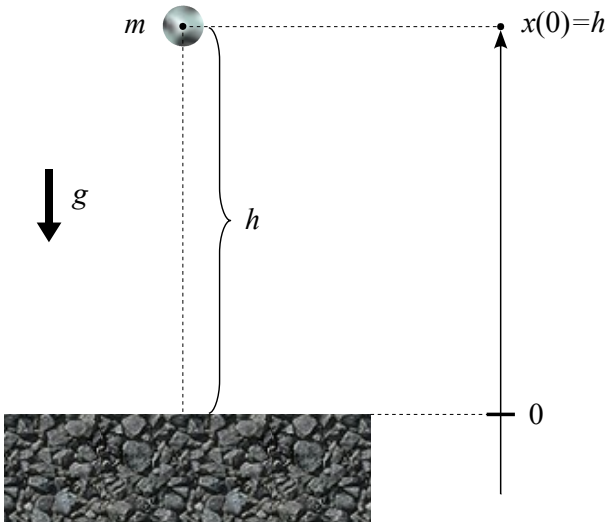


Figura 1.1: Primer sistema de referencia: $x(t)$ es la altura del cuerpo en el instante t.

Sea $x(t)$ la posición del cuerpo en el instante de tiempo t, que coincide con la altura a la que se encuentra el cuerpo en dicho instante. La aceleración puede interpretarse como la segunda derivada de la posición: $a = x''(t)$. La única fuerza que actúa es la gravedad, que tiene la forma $F = -mg$, siendo g la constante gravitatoria; observemos que el signo menos indica que la fuerza de la gravedad actúa en sentido opuesto a la dirección positiva del movimiento, es decir, hacia el suelo.

Podemos escribir pues la ecuación (1.1) como

$$mx''(t) = -mg,$$

de donde

$$x''(t) = -g. \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) es un ejemplo de *ecuación diferencial ordinaria*: en ella intervienen una variable independiente (el tiempo t), una variable dependiente (la posición x, que depende del tiempo) y alguna de sus derivadas (en este caso, la segunda: diremos

que la ecuación es de *orden dos* o de *segundo orden*). Dicha ecuación se ha obtenido mediante la interpretación de una ley física (la segunda ley de Newton) en un sistema de referencia adecuado.

La ecuación (1.2) puede resolverse mediante dos integraciones sucesivas. En efecto, en primer lugar

$$x''(t) = -g \Rightarrow x'(t) = \int (-g)\, dt = -gt + C_1,$$

donde C_1 es una constante arbitraria (constante de integración); integrando de nuevo,

$$x(t) = \int (-gt + C_1)\, dt = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2,$$

siendo C_2 otra constante arbitraria. La expresión

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \tag{1.3}$$

se denomina *solución general* de la ecuación diferencial (1.2) y es, en este caso, una familia biparamétrica de soluciones, ya que depende de dos valores o parámetros, C_1 y C_2, que pueden tomar valores cualesquiera.

Para determinar cuál es la solución correcta de nuestro problema debemos determinar los valores de C_1 y C_2 en nuestro caso particular. Para ello recurrimos a las *condiciones iniciales* del problema, que son condiciones puntuales que debe verificar la solución. En nuestro caso, la posición inicial (en el instante $t = 0$) del cuerpo es h:

$$x(0) = h,$$

mientras que su velocidad (que interpretamos como la derivada x') es nula, ya que soltamos el cuerpo sin velocidad inicial:

$$x'(0) = 0.$$

La ecuación diferencial junto con las condiciones iniciales se denomina *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy*:

$$\begin{cases} x'' = -g, \\ x(0) = h, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

El cálculo de C_1 y C_2 se efectúa sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general (1.3) (se dice que *imponemos* las condiciones iniciales):

$$h = x(0) = -\frac{g}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \Rightarrow C_2 = h,$$

y

$$0 = x'(0) = -g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Obtenemos así la única solución del problema de valores iniciales:

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h. \tag{1.4}$$

Para calcular el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo, basta con resolver la ecuación $x(t) = 0$:

$$x(t) = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2}t^2 + h = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Es importante notar que para el modelado matemático del problema no ha sido suficiente con establecer la ecuación diferencial correspondiente, sino que hemos tenido que complementarla con dos condiciones iniciales para llegar a un problema de valores iniciales. Observemos también que la solución general de la ecuación diferencial depende de dos parámetros, mientras que la solución del problema de valores iniciales está dada por (1.4) y es, por tanto, única.

Vamos a analizar ahora el mismo problema, pero usando un sistema de referencia distinto (véase la figura 1.2). Para ello, estableceremos el origen en el punto desde el que empieza a caer el objeto, y supondremos que la dirección positiva es la de caída. Si $x(t)$ es el espacio recorrido por el cuerpo en el instante t, la ecuación diferencial que modela el sistema será

$$x'' = mg,$$

ya que en este caso la fuerza gravitatoria actúa en el sentido positivo del movimiento dentro del sistema de referencia elegido. Las condiciones iniciales son, en este caso, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.

Razonando como en el ejemplo anterior, deducimos que la solución del problema de valores iniciales es simplemente

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2. \tag{1.5}$$

Observemos que no hay contradicción alguna entre las soluciones (1.4) y (1.5), ya que en cada caso x tiene una interpretación distinta: en (1.4) indica la altura del cuerpo y en (1.5) el espacio recorrido.

Las deducciones físicas obtenidas a partir del modelo deben ser independientes del sistema de referencia elegido, una vez interpretadas adecuadamente. De esta forma, si queremos calcular el tiempo que el cuerpo tarda en llegar al suelo, considerando ahora el segundo sistema de referencia, bastará con resolver la ecuación $x(t) = h$:

$$x(t) = h \Rightarrow \frac{g}{2}t^2 = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Obtenemos así el mismo resultado que con el primer sistema de referencia.

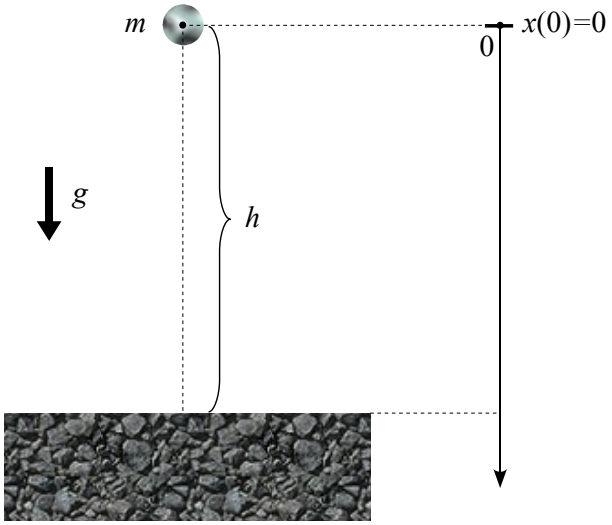


Figura 1.2: Segundo sistema de referencia: $x(t)$ es el espacio recorrido por el cuerpo en el instante t.

1.1.2. Un problema geométrico

Una *tractriz* es una curva que pasa por el punto $A = (a, 0)$ del eje de abscisas, con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente desde cualquier punto de la curva al eje de ordenadas es constante. El nombre alemán para la tractriz es *Hundekurve* (curva del perro), ya que representa el camino que seguiría un perro obstinado cuando su dueño pasea en línea recta de norte a sur.

Vamos a determinar una ecuación diferencial cuyas soluciones representan una tractriz. Para ello, consideremos el triángulo de la figura 1.3 y notemos que la pendiente de la recta tangente a la curva buscada en el punto (x, y) es

$$-\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

(el signo menos obedece a que la pendiente es negativa). Por otra parte, y según la interpretación geométrica de la derivada, dicha pendiente es precisamente $y'(x)$. Por tanto, igualando las dos expresiones para la pendiente, obtenemos

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Esta ecuación diferencial necesita complementarse con un dato adicional: como la curva pasa por el punto $A = (a, 0)$, tenemos que

$$y(a) = 0.$$

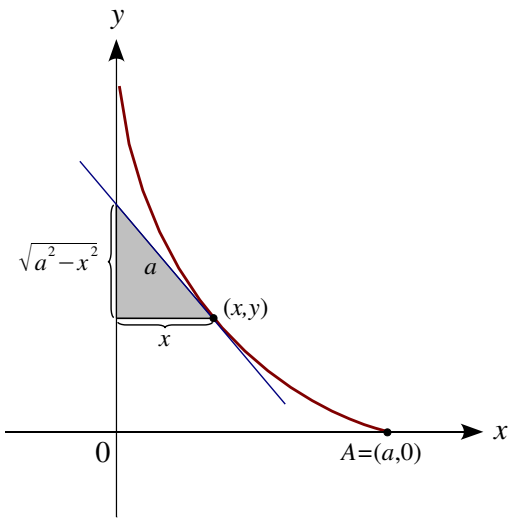


Figura 1.3: Esquema de la tractriz.

En resumen, para encontrar la ecuación de la tractriz debemos resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

En este caso, la ecuación diferencial puede resolverse mediante integración directa:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \Rightarrow y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx.$$

El cálculo de la primitiva se realiza mediante el cambio de variable $x = a\,\mathrm{sen}(t)$. Tras una serie de cálculos enrevesados, se obtiene la siguiente expresión:

$$y = \pm\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C,$$

donde C es una constante arbitraria. Imponiendo la condición $y(a) = 0$, podemos determinar el valor de C:

$$y(a) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Finalmente, la ecuación de la tractriz viene dada por

$$y = \pm\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

En la figura 1.4 se representa la tractriz correspondiente al valor $a = 2$.

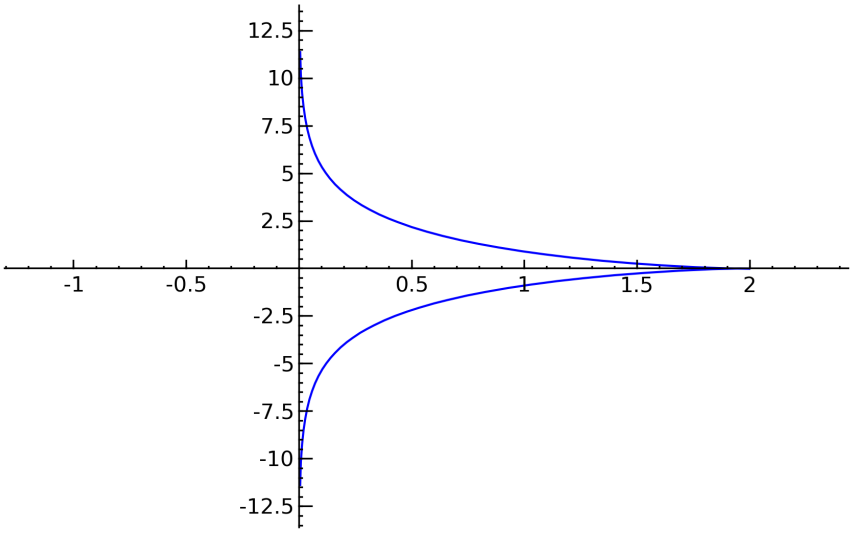


Figura 1.4: Tractriz correpondiente al valor $a = 2$.

1.1.3. Desintegración radiactiva

Consideremos una muestra radiactiva que consta de $N(t)$ átomos en el instante de tiempo t. A la vista de diversos experimentos realizados, es plausible suponer que la velocidad de desintegración es proporcional, en cada instante, al número de átomos presente en la muestra. Si inicialmente la muestra consta de N_0 átomos, queremos determinar el número de átomos en cualquier instante posterior.

Podemos identificar la velocidad de desintegración de la muestra con la derivada de $N(t)$, con lo que se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = -kN, \tag{1.6}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Supondremos que las constantes que aparecen en la escritura de un modelo son siempre positivas; el signo menos en el segundo miembro de la ecuación anterior indica entonces que la cantidad de sustancia va disminuyendo, como debe suceder realmente. En efecto, al ser k y N positivas, la derivada $N'(t)$ es negativa, con lo que $N(t)$ es una función decreciente. Por último, la condición inicial a considerar es $N(0) = N_0$.

La ecuación (1.6) es de *variables separadas o separables*; en el capítulo 2 veremos cómo se resuelve. Es sencillo comprobar que la solución del problema de valor inicial es

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

que es precisamente la ley de desintegración radiactiva que determina la cantidad de

sustancia que queda en la muestra en cada instante. Obsérvese además que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 0,$$

lo que indica que la muestra radiactiva tiende a desaparecer conforme avanza el tiempo.

1.1.4. Un problema de mezclas

Consideremos un depósito que contiene 50 l de agua con 75 gr de sal disueltos. En un determinado instante comienza a entrar agua salada a razón de 2 l/min, con una concentración de 3 gr/l de sal, mientras que el agua, perfectamente mezclada, sale del depósito a razón de 2 l/min. Queremos determinar en qué instante la cantidad de sal en el depósito será de 125 gr. En la figura 1.5 se presenta un esquema de la situación.

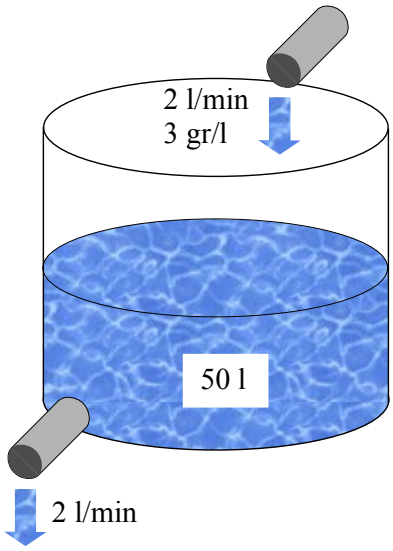


Figura 1.5: Esquema del problema de mezclas.

Llamemos $S(t)$ a la cantidad de sal en el depósito en el instante t. Notemos que el volumen de agua en el depósito es siempre de 50 litros, ya que en cada instante entran dos litros y salen otros dos. Por tanto, la concentración de sal en cada instante será de $S(t)/50$ gr/l. La velocidad de variación de la concentración de sal viene dada por $S'(t)$, que se expresa en gr/min.

Por un lado, el aporte de sal por minuto al depósito será de

$$2\ \text{l/min} \times 3\ \text{gr/l} = 6\ \text{gr/min},$$

mientras que la tasa de pérdida de sal es de

$$2\ \text{l/min} \times \frac{S(t)}{50}\ \text{gr/l} = \frac{S(t)}{25}\ \text{gr/min}.$$

La variación total de la concentración de sal viene dada por la diferencia entre el aporte y la pérdida de sal. Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial

$$S'(t) = 6 - \frac{S(t)}{25}.$$

La condición inicial es $S(0) = 75$, ya que inicialmente hay 75 gr de sal en el depósito. La ecuación diferencial es de variables separadas, aunque también es una ecuación *lineal* (ver capítulo 2). La solución del problema de valor inicial es

$$S(t) = 150 - 75e^{-t/25}.$$

Nótese que la función $S(t)$ es creciente, ya que

$$S'(t) = 3e^{-t/25} > 0.$$

Esto significa que la cantidad de sal en el depósito aumenta al avanzar el tiempo.

Para determinar cuándo la cantidad de sal en el depósito será de 125 gr, basta con resolver la ecuación $S(t) = 125$:

$$S(t) = 125 \Rightarrow 150 - 75e^{-t/25} = 125 \Rightarrow t = -25\ln(1/3) = 25\ln(3) \approx 27{,}4653\ \text{min}.$$

CAPÍTULO

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1. Introducción

Una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden* es una expresión que relaciona una variable independiente x con una variable dependiente $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Por ejemplo, son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden las siguientes:

$$y'(x) = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = y, \qquad y + (y')^{1/3} + 25x = \operatorname{sen}(x).$$

Para representar la derivada de y respecto de x usaremos indistintamente las notaciones y', $y'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$. Salvo que sea necesario por claridad, en general no expresaremos la dependencia de la variable y respecto de x:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in [a, b].$$

Una *solución* de una ecuación diferencial de primer orden es una función

$$y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

que verifica la ecuación en cada punto $x \in [a,b]$. Para que esta definición tenga sentido, es preciso que la función $y(x)$ sea derivable en el intervalo $[a,b]$ y que dicha derivada sea una función continua: se dice entonces que $y(x)$ es de clase $C^1([a,b])$.

Ejemplo 2.1. La función $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = e^{-x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = -y$, ya que es derivable con continuidad en $\mathbb{R}$ y

$$y'(x) = -e^{-x} = -y(x). \qquad \square$$

La *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones $y \equiv y(x,C)$ dependiente de un parámetro (o constante arbitraria) C que nos proporciona *todas* las posibles soluciones de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.2. La solución general de la ecuación diferencial $y' = -y$ es

$$y = Ce^{-x},$$

siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. En efecto, cualquier función de la forma anterior es solución de la ecuación:

$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$

Más adelante veremos que todas las posibles soluciones de la ecuación tienen la forma anterior. $\square$

Resolver una ecuación diferencial significa obtener *todas* sus soluciones, esto es, hay que determinar su solución general. La inmensa mayoría de ecuaciones diferenciales no pueden resolverse mediante métodos analíticos, es decir, no es posible obtener una expresión exacta de la solución $y \equiv y(x,C)$. En este tema estudiaremos diversos tipos clásicos de ecuaciones que sí pueden resolverse de forma explícita.

Una ecuación diferencial de primer orden está escrita en *forma normal* (también se dice que está *resuelta respecto de la derivada*) si la derivada y' aparece despejada:

$$y' = f(x,y).$$

Toda ecuación en forma normal también puede escribirse en *forma diferencial*:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

En efecto:

$$y' = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow f(x,y)dx - dy = 0;$$

basta pues tomar $M(x,y) = f(x,y)$ y $N(x,y) = -1$.

En las secciones siguientes estudiaremos métodos de resolución para tres tipos fundamentales de ecuaciones diferenciales de primer orden:

- Ecuaciones de variables separables: $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$.
- Ecuaciones lineales: $y' = a(x)y + b(x)$.
- Ecuaciones exactas: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ con $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

2.2. Ecuaciones de variables separables

Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es de *variables separables* si puede escribirse en la forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

siendo $f(x)$ y $g(y)$ funciones de una sola variable.

Las ecuaciones de variables separables se resuelven agrupando en un miembro de la ecuación los términos que dependen de x, y en el otro aquellos que dependen de y; a continuación, se integran ambos miembros para obtener la solución general de la ecuación. De este modo, podemos escribir formalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Si $G(y)$ y $F(x)$ son primitivas de $g(y)$ y $f(x)$ respectivamente, obtenemos que

$$G(y) = H(x) + C,$$

donde C es la constante de integración: recordemos que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante. La expresión obtenida es la solución general de la ecuación diferencial. Puede suceder que en dicha expresión no podamos despejar la variable y; en tal caso se dice que la solución está dada en forma *implícita*.

Ejemplo 2.3. Consideremos la ecuación diferencial $y' = 2xy$, que es de variables separables. Para resolverla, separamos las variables e integramos:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln(y) = x^2 + c,$$

siendo c una constante de integración. Despejemos la variable y:

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^c.$$

Por último, renombrando la constante e^c como una constante arbitraria C, obtenemos la solución general de la ecuación:

$$y = Ce^{x^2}.$$

El siguiente código permite resolver la ecuación del ejemplo usando Sage:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == 2*x*y
sage: desolve(ec, y)
c*e^(x^2)
```

□

Ejemplo 2.4. Consideremos la ecuación en forma diferencial

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Podemos separar las variables como sigue:

$$\frac{1-y^2}{y}\,dy = xe^{x^2}dx.$$

Integrando, obtenemos la solución general:

$$\int \frac{1-y^2}{y}\,dy = \int xe^{x^2}dx \Rightarrow \ln(y) - \frac{y^2}{2} = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

De nuevo Sage nos proporciona la solución correcta:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == x*exp(x^2)*y/(1-y^2)
sage: desolve(ec, y)
-1/2*y(x)^2 + log(y(x)) == c + 1/2*e^(x^2)
```

En este caso no podemos despejar la variable y, por lo que debemos conformarnos con la solución general en forma implícita. □

Ejemplo 2.5. Por supuesto, no todas las ecuaciones diferenciales de primer orden son de variables separables. Como muestra, un botón:

$$y' = x^2 + y^2.$$ □

A continuación vamos a considerar el caso particular de las *ecuaciones homogéneas* que, aun no siendo estrictamente de variables separables, pueden reducirse a una de estas mediante un cambio de variable.

Diremos que una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ es *homogénea* si la función $f(x,y)$ verifica la siguiente propiedad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y) \qquad \text{para cada } \lambda > 0.$$

En tal caso, mediante el cambio de variable

$$z = \frac{y}{x}$$

podemos transformarla en una ecuación de variables separables. Para comprobarlo, tengamos en cuenta que $y = xz$ y, por tanto, $y' = z + xz'$; sustituyendo en la ecuación, resulta:

$$z + xz' = f(x, xz) \Rightarrow z + xz' = f(1, z) \Rightarrow z' = \frac{f(1,z) - z}{x},$$

siendo esta ultima ecuación de variables separables.

Ejemplo 2.6. La ecuación

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

es homogénea. En efecto, si definimos

$$f(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

entonces, para cada $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y + \sqrt{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{\lambda y + \sqrt{\lambda^2 (x^2 - y^2)}}{\lambda x} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = f(x, y).$$

Para resolver la ecuación, hacemos el cambio $z = y/x$. El segundo miembro de la ecuación quedaría así:

$$\frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{xz + \sqrt{x^2 - (xz)^2}}{x} = \frac{xz + \sqrt{x^2(1 - z^2)}}{x} = z + \sqrt{1 - z^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, resulta

$$z + xz' = z + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x}.$$

La ecuación obtenida es de variables separables, por lo que podemos resolverla mediante integración:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{arc\,sen}(z) = \ln(x) + C \Rightarrow z = \operatorname{sen}(\ln(x) + C)$$

(nótese que se ha supuesto $x > 0$ para que $\ln(x)$ tenga sentido). Por último, deshacemos el cambio $z = y/x$ para obtener la solución general:

$$y = x \operatorname{sen}(\ln(x) + C).$$

El código Sage para resolver la ecuación diferencial es:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == (y+sqrt(x^2-y^2))/x
sage: desolve(ec, y)
x == c*e^(x*arcsin(y(x)/x)/sqrt(x^2))
```

En este caso, la solución obtenida viene dada en forma implícita:

$$x = c\, e^{x \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right)/\sqrt{x^2}}$$

Suponiendo que $x > 0$, la expresión anterior puede simplificarse:

$$x = c\, e^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow y = x \operatorname{sen}(\ln(x) + C),$$

donde $C = \ln(c)$. Si queremos que Sage imponga de antemano la condición $x > 0$, podemos usar el comando `assume`:

```
sage: var('x')
sage: assume(x>0) # suponemos que x>0
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == (y+sqrt(x^2-y^2))/x
sage: desolve(ec, y)
c*x == e^(arcsin(y(x)/x))
```

En el cálculo de la solución hemos supuesto que $x > 0$. ¿Qué ocurre en caso contrario? En primer lugar, notemos que el caso $x = 0$ no tiene cabida, ya que la función que define el segundo miembro de la ecuación diferencial no está definida en $x = 0$. Supongamos pues que $x < 0$; en tal caso, cambiamos de signo ambos miembros de la ecuación y tenemos en cuenta que $-x > 0$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x} \Rightarrow -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{-x} \Rightarrow -\operatorname{arc\,sen}(z) = -\ln(-x) + C.$$

Cambiando de signo y renombrando la constante de integración, obtenemos:

$$z = \operatorname{sen}(\ln(-x) + C) \Rightarrow y = x \operatorname{sen}(\ln(-x) + C).$$

Si no queremos preocuparnos del signo de x, es práctica habitual definir

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

De esta manera, podemos considerar la siguiente expresión de la solución general:

$$y = x \operatorname{sen}(\ln|x| + C),$$

que es válida independientemente del signo de x. □

Ejemplo 2.7. La ecuación diferencial

$$y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}$$

no es homogénea:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y - 2}{\lambda x - \lambda y + 4} \neq \frac{x + y - 2}{x - y + 4} = f(x, y).$$

Observemos que la condición de homogeneidad falla debido a los términos independientes del numerador y el denominador de la función $f(x, y)$: si dichos términos no existieran, la ecuación sí que sería homogénea. Esto nos da la idea de buscar un cambio de variables que elimine dichos términos.

Geométricamente, podemos interpretar el numerador y el denominador de $f(x, y)$ como las rectas de ecuaciones $x + y - 2 = 0$ y $x - y + 4 = 0$, respectivamente. Dichas rectas se cortan en el punto $(-1, 3)$ (que se obtiene resolviendo el sistema dado por las ecuaciones de ambas rectas). Mediante el cambio de variables

$$t = x - (-1) = x + 1, \qquad z = y - 3,$$

trasladamos el punto $(-1, 3)$ al origen $(0, 0)$. La ecuación resultante va a ser homogénea.

En efecto, teniendo en cuenta que $dx = dt$ y $dy = dz$, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t + z}{t - z} = \frac{1 + z/t}{1 - z/t}.$$

Es fácil comprobar que esta ecuación es homogénea. Haciendo el cambio $u = z/t$, resulta:

$$t\frac{du}{dt} + u = \frac{1 + u}{1 - u} \Rightarrow t\frac{du}{dt} = \frac{1 + u^2}{1 - u}.$$

Mediante separación de variables, tenemos que

$$\int \frac{1 - u}{1 + u^2}\, du = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}(u) - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln(t) + C.$$

Deshaciendo los cambios, obtenemos la solución general en forma implícita:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y - 3}{x + 1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{y - 3}{x + 1}\right)^2\right] = \ln(x + 1) + C. \qquad \square$$

2.3. Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial de primer orden es *lineal* si puede escribirse en la forma

$$y' = a(x)y + b(x)$$

para ciertas funciones $a(x)$ y $b(x)$. Cuando $b(x) \equiv 0$ la ecuación es de variables separables y se denomina *homogénea*; en caso contrario, la ecuación se dice *completa*.

El proceso de resolución de una ecuación lineal consta de dos etapas:

- Cálculo de la solución general $y_H(x, C)$ de la ecuación homogénea asociada: $y' = a(x)y$.
- Determinación de una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación completa.

Veamos en detalle dicho proceso. En primer lugar, resolvemos la ecuación homogénea asociada, que es de variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx \Rightarrow \ln(y) = A(x) + c,$$

siendo $A(x)$ una primitiva de $a(x)$; despejando la variable y obtenemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$y_H(x, C) = Ce^{A(x)},$$

(nótese que la constante C sustituye a e^c en este último paso).

Para determinar una solución particular de la ecuación completa utilizaremos el *método de variación de la constante*. Dicho método se basa en construir una solución $y_P(x)$ con la misma estructura que $y_H(x, C)$, donde se sustituye la constante arbitraria C por una función $C(x)$:

$$y_P(x) = C(x)e^{A(x)}.$$

A continuación, se determina $C(x)$ imponiendo que $y_P(x)$ sea solución de la ecuación completa:

$$y_P' = a(x)y_P + b(x) \Rightarrow C'(x)e^{A(x)} + A'(x)C(x)e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x);$$

teniendo en cuenta que $A'(x) = a(x)$, resulta:

$$C'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,dx$$

(nótese que este último paso no hay que añadir una constante de integración, ya que sólo necesitamos una solución particular). Finalmente, la solución particular buscada es

$$y_P = \left(\int b(x)e^{-A(x)}\,dx\right)e^{A(x)}.$$

Una vez calculadas $y_H(x, C)$ e $y_P(x)$, la solución *general* de la ecuación completa es

$$y \equiv y(x, C) = y_H(x, C) + y_P(x).$$

Observación. En efecto, teniendo en cuenta que y_H e y_P verifican, respectivamente, las igualdades $y_H' = a(x)y_H$ e $y_P' = a(x)y_P + b(x)$, tenemos que

$$y' = y_H' + y_P' = a(x)y_H + a(x)y_P + b(x) = a(x)(y_H + y_P) + b(x) = a(x)y + b(x),$$

lo que significa que $y = y_H + y_P$ es solución de la ecuación completa; además, al ser y_H una familia uniparamétrica de soluciones, y también lo es. Para probar que se trata de la solución general, veamos que cualquier solución $\tilde{y}$ de la ecuación completa es de la forma $\tilde{y}_H + y_P$, para una cierta solución $\tilde{y}_H$ de la ecuación homogénea. Si y es cualquier solución de la forma $y_H + y_P$, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{y}' = a(x)\tilde{y} + b(x) \\ y' = a(x)y + b(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{y}' - y' = a(x)\tilde{y} - a(x)y \Rightarrow (\tilde{y} - y)' = a(x)(\tilde{y} - y).$$

Esto muestra que $\tilde{y} - y$ es una solución de la ecuación homogénea, que llamaremos $\tilde{y}_H$. Por tanto,

$$\tilde{y} - y = \tilde{y}_H \Rightarrow \tilde{y} = y + \tilde{y}_H = (y_H + y_P) + \tilde{y}_H = (y_H + \tilde{y}_H) + y_P,$$

donde $y_H + \tilde{y}_H$ es solución de la ecuación homogénea (esto se comprueba fácilmente). Hemos demostrado así que $\tilde{y}$ es de la forma requerida. □

Recapitulando, para calcular la solución general de una ecuación lineal basta con calcular la solución general de la ecuación homogénea asociada (que siempre es de variables separables) y sumarle a ésta una solución cualquiera de la ecuación completa.

Ejemplo 2.8. Consideremos la ecuación lineal

$$y' = \frac{y}{x} + \ln(x),$$

donde $a(x) = 1/x$ y $b(x) = \ln(x)$. Primero, calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + c \Rightarrow y_H(x, C) = Cx.$$

A continuación, buscamos una solución particular de la forma

$$y_P = C(x)x,$$

donde ahora $C(x)$ representa una función a determinar; para ello, sustituimos y_P en la ecuación completa:

$$y_P' = \frac{y_P}{x} + \ln(x) \Rightarrow C'(x)x + \cancel{C(x)} = \frac{\cancel{C(x)}x}{x} + \ln(x)$$
$$\Rightarrow C'(x) = \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x).$$

Sustituyendo en $y_P = C(x)x$ se determina una solución particular de la ecuación completa:

$$y_P = \frac{x}{2}\ln^2(x).$$

Finalmente, la solución general de la ecuación completa será

$$y = Cx + \frac{x}{2}\ln^2(x).$$

Sage calcula de forma directa la solución general de la ecuación:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == y/x + log(x)
sage: desolve(ec, y)
1/2*(log(x)^2 + 2*c)*x
```

□

Ejemplo 2.9. Resolvamos la ecuación lineal

$$y' = y + \cos(x),$$

en la que $a(x) = 1$ y $b(x) = \cos(x)$. En primer lugar estudiamos la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln(y) = x + c \Rightarrow y = Ce^x.$$

A continuación, buscamos una solución particular de la forma

$$y_P = C(x)e^x.$$

Como $y_P' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, sustituyendo en la ecuación completa obtenemos

$$y_P' = y_P + \cos(x) \Rightarrow C'(x)e^x + \cancel{C(x)e^x} = \cancel{C(x)e^x} + \cos(x) \Rightarrow C'(x) = e^{-x}\cos(x).$$

Integrando por partes, resulta

$$C(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}\, e^{-x}.$$

Por tanto, una solución particular es

$$y_P = C(x)e^x = \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}\, e^{-x}e^x = \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación será

$$y = Ce^x + \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}.$$

Aquí está el código Sage para resolver la ecuación:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == y + cos(x)
sage: desolve(ec, y)
1/2*((sin(x) - cos(x))*e^(-x) + 2*c)*e^x
```

Si queremos una expresión más simplificada del resultado, podemos utilizar el comando expand en la última línea del código:

```
sage: expand(desolve(ec, y))
c*e^x + 1/2*sin(x) - 1/2*cos(x)
```

□

Ejemplo 2.10. Consideremos la ecuación diferencial de aspecto rocambolesco

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2+\cos(y)) + e^{2y+\text{sen}(y)}},$$

que no se ajusta a ninguno de los tipos estudiados hasta ahora. Sin embargo, si invertimos ambos miembros, obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = (2+\cos(y))x + e^{2y+\text{sen}(y)},$$

que puede verse como una ecuación lineal si consideramos a x como variable dependiente, a y como variable independiente, y definimos $a(y) = 2+\cos(y)$ y $b(y) = e^{2y+\text{sen}(y)}$.

La solución general de la ecuación homogénea asociada,

$$\frac{dx_H}{dy} = (2+\cos(y))x_H,$$

se obtiene mediante separación de variables:

$$x_H = Ce^{2y+\text{sen}(y)}.$$

Buscamos entonces una solución particular de la forma

$$x_P = C(y)e^{2y+\text{sen}(y)}.$$

Como

$$\frac{dx_P}{dy} = \left(C'(y) + (2+\cos(y))C(y)\right)e^{2y+\text{sen}(y)},$$

sustituyendo en la ecuación completa resulta

$$\left(C'(y) + (2+\cos(y))C(y)\right)e^{2y+\text{sen}(y)} = (2+\cos(y))C(y)e^{2y+\text{sen}(y)} + e^{2y+\text{sen}(y)},$$

de donde

$$C'(y)e^{2y+\text{sen}(y)} = e^{2y+\text{sen}(y)} \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y.$$

Por tanto, una solución particular es

$$x_P(y) = ye^{2y+\operatorname{sen}(y)}.$$

La solución general de la ecuación será entonces

$$x = (y + C)e^{2y+\operatorname{sen}(y)},$$

que podemos interpretar como la solución general en forma implícita de la ecuación original. □

Vamos a concluir esta sección con el estudio de una clase importante de ecuaciones no lineales que pueden transformarse en lineales mediante un cambio de variables: las *ecuaciones de Bernoulli*. Una ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Observemos que hay dos casos triviales, que corresponden a los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$:

$$\alpha = 0 \Rightarrow y' = a(x)y + b(x) \quad \text{(lineal)},$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow y' = a(x)y + b(x)y = (a(x) + b(x))y \quad \text{(variables separadas)}.$$

En el resto de casos (salvo, por supuesto, que $b(x) \equiv 0$), la ecuación de Bernoulli no es lineal.

Supondremos en lo que sigue que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $y^{-\alpha}$, resulta

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Teniendo en cuenta que $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, multiplicando por $1-\alpha$ la ecuación anterior obtenemos

$$(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(x).$$

Si definimos $z = y^{1-\alpha}$, se obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$z' = \tilde{a}(x)z + \tilde{b}(x),$$

donde $\tilde{a}(x) = (1-\alpha)a(x)$ y $\tilde{b}(x) = (1-\alpha)b(x)$.

En resumen, podemos transformar la ecuación de Bernoulli en una ecuación de tipo lineal mediante el cambio de variable dependiente dado por

$$z = y^{1-\alpha},$$

supuesto $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

Ejemplo 2.11. Consideremos la ecuación diferencial

$$xy' + y = x^4y^3 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} + x^3y^3,$$

que es de Bernoulli con $\alpha = 3$. Hagamos el cambio

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-2} \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}y'.$$

Multiplicando la ecuación por $-2y^{-3}$, resulta

$$-2y^{-3}y' = \frac{2}{x}y^{-2} - 2x^3 \Rightarrow z' = \frac{2}{x}z - 2x^3.$$

La ecuación lineal resultante puede resolverse mediante el método de variación de la constante. La solución general es

$$z = Cx^2 - x^4.$$

Finalmente, deshacemos el cambio $z = y^{-2}$:

$$y^{-2} = Cx^2 - x^4 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{Cx^2 - x^4}.$$

Sage es capaz de resolver directamente una ecuación de Bernoulli:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = x*diff(y, x) + y == x^4*y^3
sage: desolve(ec, y)
1/(sqrt(-x^2 + c)*x)
```

□

2.4. Ecuaciones exactas

Una ecuación en forma diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es *exacta* si se verifica la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En tal caso, la solución general de la ecuación viene dada por la expresión

$$E(x,y) = C,$$

donde $E(x,y)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = M(x,y), \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

Se dice que la función $E(x,y)$ es un *potencial* asociado al campo vectorial $M(x,y)\vec{\imath} + N(x,y)\vec{\jmath}$.

Observación. La terminología usada en esta sección proviene de la Física (véase la sección 2.7.2). En efecto, el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{\imath} + N(x,y)\vec{\jmath}$ es *conservativo* si se verifica que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, lo que coincide con la condición de exactitud. Todo campo conservativo deriva de un potencial, esto es, existe una *función potencial* $E(x,y)$ tal que $\vec{F}$ puede expresarse como el gradiente de E:

$$\vec{F}(x,y) = \overrightarrow{\nabla} E(x,y) \Rightarrow M(x,y)\vec{\imath} + N(x,y)\vec{\jmath} = \frac{\partial E}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial E}{\partial y}\,\vec{\jmath}.$$

Igualando componentes, se deducen las ecuaciones para determinar el potencial:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = N(x,y). \qquad \square$$

Observación. Supongamos que $y(x)$ verifica que $E(x,y(x)) = C$. Derivando respecto a x, y aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}E(x,y(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx} = 0.$$

Usando las igualdades $\frac{\partial E}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial E}{\partial y} = N$, resulta:

$$M(x,y(x)) + N(x,y(x))\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow M(x,y(x))\,dx + N(x,y(x))\,dy = 0.$$

Esto prueba que $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Bajo ciertas hipótesis de regularidad, puede demostrarse la existencia de una función potencial $E(x,y)$. $\square$

Ejemplo 2.12. Resolvamos la ecuación diferencial

$$2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0.$$

En este caso, $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = x^2 - 1$. Derivando, obtenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 1) = 2x,$$

lo que demuestra que la ecuación es exacta.

Para calcular un potencial, hemos de resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = 2xy \equiv M(x,y), \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = x^2 - 1 \equiv N(x,y). \end{cases}$$

Integrando respecto de x en la primera ecuación, resulta:

$$E(x,y) = \int \frac{\partial E}{\partial x}\, dx = \int 2xy\, dx = y \int 2x\, dx = x^2 y + g(y).$$

Observemos que al integrar la función de dos variables $E(x,y)$ respecto de la variable x, la «constante» de integración que aparece no es realmente una constante, sino una función de la variable y; en efecto, para cualquier función $g(y)$ se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + g(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x} g(y) = 2xy + 0 = 2xy.$$

A continuación, derivamos la expresión obtenida para $E(x,y)$ respecto de la variable y:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + g(y)) = x^2 + g'(y),$$

y sustituimos en la segunda ecuación del sistema:

$$\cancel{x^2} + g'(y) = \cancel{x^2} - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = \int (-1) dy = -y.$$

Por tanto, una función potencial viene dada por

$$E(x,y) = x^2 y - y = (x^2 - 1)\, y.$$

La solución general de la ecuación diferencial será entonces

$$E(x,y) = C \Rightarrow (x^2 - 1)\, y = C \Rightarrow y = \frac{C}{x^2 - 1}.$$

En el desarrollo anterior, para calcular el potencial $E(x,y)$ hemos partido de la primera ecuación. Vamos a ver qué sucede si comenzamos integrando en la segunda ecuación:

$$E(x,y) = \int \frac{\partial E}{\partial y}\, dy = \int (x^2 - 1)\, dy = (x^2 - 1) \int dy = (x^2 - 1) y + h(x).$$

Derivando respecto de x y sustituyendo en la primera ecuación, resulta:

$$\cancel{2xy} + h'(x) = \cancel{2xy} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c,$$

donde c puede ser cualquier constante; tomemos $c = 0$, y así $h(x) = 0$. El potencial es entonces $E(x, y) = (x^2 - 1)\, y$ y la solución general $(x^2 - 1)\, y = C$. Obtenemos pues el mismo resultado que en la primera parte del ejemplo, como era de esperar.

Podemos resolver la ecuación usando Sage si la escribimos en forma normal:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == -2*x*y/(x^2-1)
sage: desolve(ec, y)
c/(x^2 - 1)
```

□

Ejemplo 2.13. Sea la ecuación diferencial

$$(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\, dx + x^2 \cos(xy)\, dy = 0.$$

Llamemos $M(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)$ y $N(x, y) = x^2\cos(xy)dy$, y notemos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy) + x\cos(xy) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x\cos(xy) + x^2 y \operatorname{sen}(xy) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

lo que prueba que la ecuación es exacta.

Para calcular el potencial $E(x, y)$ consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) \equiv M(x, y), \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = x^2\cos(xy) \equiv N(x, y). \end{cases}$$

En este caso es más sencillo integrar primero la segunda ecuación:

$$E(x, y) = \int \frac{\partial E}{\partial y}\, dy = \int x^2\cos(xy)\, dy = x^2 \int \cos(xy)\, dy = x\operatorname{sen}(xy) + g(x).$$

Derivando respecto de x, resulta:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + g'(x).$$

Ahora sustituimos la expresión anterior en la primera ecuación:

$$\cancel{\operatorname{sen}(xy)} + \cancel{xy\cos(xy)} + g'(x) = \cancel{\operatorname{sen}(xy)} + \cancel{xy\cos(xy)} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c,$$

siendo c una constante arbitraria. Tomando $c = 0$, obtenemos $g(x) = 0$. Así pues, un potencial es

$$E(x, y) = x\operatorname{sen}(xy),$$

y la solución general de la ecuación diferencial, en forma implícita, viene dada por

$$x\,\mathrm{sen}(xy) = C.$$

También Sage es capaz de resolver esta ecuación, si previamente la hemos escrito en forma normal:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == -(sin(x*y)+x*y*cos(x*y))/(x^2*cos(x*y))
sage: desolve(ec, y)
x*sin(x*y(x)) == c
```

En caso de que Sage no pueda obtener una solución de forma directa, cabe la posibilidad de realizar todo el proceso de resolución. Vamos a ilustrarlo con la ecuación del ejemplo.

En primer lugar, definimos las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$, y comprobamos la condición de exactitud:

```
sage: var('x, y')
sage: # definimos M y N
sage: M = sin(x*y)+x*y*cos(x*y)
sage: N = x^2*cos(x*y)
sage: # comprobamos la exactitud
sage: diff(M, y)-diff(N, x)
0
```

A continuación resolvemos la ecuación $\frac{\partial E}{\partial x} = M(x,y)$ mediante integración:

```
sage: # hacemos la integral de M respecto de x
sage: # para calcular el potencial E
sage: E = integral(M, x); expand(E)
x*sin(x*y)
```

Como Sage ha calculado sólo la primitiva más simple, añadimos una función dependiente de la variable y:

```
sage: # sumamos una "constante" dependiente de y
sage: g = function('g', y)
sage: EE = E + g; expand(EE)
x*sin(x*y) + g(y)
```

A continuación, derivamos la expresión obtenida respecto de y e igualamos a $N(x,y)$:

```
sage: # derivamos respecto de y e igualamos a N
sage: ec = diff(EE, y) == N; expand(ec)
x^2*cos(x*y) + D[0](g)(y) == x^2*cos(x*y)
```

Calculamos $g(y)$ despejando e integrando:

```
sage: # despejamos g'(y)
sage: dg = solve(ec, diff(g,y)); dg
[D[0](g)(y) == 0]
sage: # integramos g'(y) respecto de y
sage: g = integrate(dg[0].rhs(), y); g
0
```

(nótese que `dg` representa una ecuación; para considerar su segundo miembro, que es el valor obtenido para $g(y)$, usamos la notación `dg[0].rhs()`[1]). Por último, definimos el potencial $E(x,y)$:

```
sage: # definimos el potencial
sage: E = E + g; expand(E)
x*sin(x*y)
```

□

2.5. Factores integrantes

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

En el caso en que la ecuación sea exacta, en el apartado anterior hemos estudiado cómo determinar su solución general mediante el uso de una función potencial.

¿Qué podemos hacer en caso de que la ecuación no sea exacta? Observemos que al multiplicar la ecuación por una función $r(x,y)$ no idénticamente nula, se obtiene una ecuación equivalente:

$$r(x,y)M(x,y)dx + r(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

que podemos escribir como

$$\widetilde{M}(x,y)dx + \widetilde{N}(x,y)dy = 0,$$

donde $\widetilde{M}(x,y) = r(x,y)M(x,y)$ y $\widetilde{N}(x,y) = r(x,y)N(x,y)$. Si conseguimos determinar $r(x,y)$ para que se verifique

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x},$$

la nueva ecuación será exacta y podremos resolverla. Una función $r(x,y)$ con dicha propiedad se denomina *factor integrante*.

[1] Podemos dar una explicación un poco más técnica de la notación. El valor `dg` representa una *lista* o conjunto de ecuaciones que, en este ejemplo, consta de un único elemento, ya que sólo estamos considerando una ecuación. Los elementos de una lista se enumeran comenzando con el *índice* `0`, por eso `dg[0]` hace referencia al primer elemento de la lista. En lenguaje informático, `dg[0]` es un *objeto*, esto es, una estructura con determinados contenidos y aplicaciones (o *métodos*) asociadas a ella. Para acceder a los contenidos de un objeto se usa un punto (`.`) detrás del nombre del objeto. De esta forma, `dg[0].rhs` denota un método que devuelve el miembro de la derecha (`rhs`: *right hand side*, en inglés) de la ecuación representada por `dg[0]`; los paréntesis vacíos hacen que se ejecute dicho método sin ningún argumento extra. En general, si queremos ver los métodos asociados a un objeto en Sage, basta con escribir el nombre del objeto seguido de un punto y pulsar la tecla de tabulación.

Ejemplo 2.14. Consideremos la ecuación

$$(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

Definamos $M(x,y) = x + y^2$ y $N(x,y) = -2xy$, y notemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y \neq -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = \frac{\partial N}{\partial x},$$

lo que indica que la ecuación no es exacta.

La función

$$r(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante. En efecto, si definimos

$$\widetilde{M}(x,y) = r(x,y)M(x,y) = \frac{x+y^2}{x^2}, \qquad \widetilde{N}(x,y) = r(x,y)N(x,y) = -\frac{2y}{x},$$

se verifica que

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x}\right) = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x}.$$

Por tanto, la ecuación diferencial

$$\widetilde{M}(x,y)dx + \widetilde{N}(x,y)dy = 0 \Rightarrow \frac{x+y^2}{x^2}\,dx - \frac{2xy}{x^2}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{x+y^2}{x^2}\,dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

es exacta, y podemos resolverla mediante el método descrito en la sección anterior. Una función potencial es $E(x,y) = \ln(x) - y^2/x$, por lo que la solución general será

$$\ln(x) - \frac{y^2}{x} = C \Rightarrow y^2 = x(\ln(x) - C). \qquad \square$$

Está claro que la cuestión fundamental en este contexto es: ¿cómo podemos determinar un factor integrante? La respuesta es que no hay ningún método general que nos permita calcular factores integrantes: sólo podemos dar una respuesta parcial al problema. Notemos que el intento de calcular el factor integrante $r(x,y)$ directamente a partir de la ecuación de exactitud

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(rM) = \frac{\partial}{\partial x}(rN)$$

nos lleva a la ecuación en derivadas parciales

$$M\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial r}{\partial x} + r\frac{\partial N}{\partial x},$$

cuya resolución sólo podremos realizarla en casos muy sencillos.

El método usual para buscar un factor integrante es mediante prueba y error. Por supuesto, no se trata de probar todas las funciones posibles para ver si alguna de ellas es un factor integrante (tarea, por otro lado, imposible), sino que debemos restringir nuestra búsqueda a determinados tipos de funciones. Más concretamente, se intentará buscar el factor integrante de la forma $r(x,y) = \phi(\varphi(x,y))$, donde ϕ es una función de una variable y $\varphi(x,y)$ expresa una relación algebraica simple entre las variables x e y. La elección de $\varphi(x,y)$ se hace mediante prueba y error, mientras que ϕ se determina imponiendo la condición de exactitud a la ecuación modificada. Típicos candidatos a factor integrante son:

$$\begin{aligned}
&r(x,y) = \phi(x),\\
&r(x,y) = \phi(y),\\
&r(x,y) = \phi(x \pm y),\\
&r(x,y) = \phi(x^n \pm y^m), \quad n,m \in \mathbb{Z},\\
&r(x,y) = \phi(xy),\\
&r(x,y) = \phi(x/y),\\
&r(x,y) = \phi(x^n y^m), \quad n,m \in \mathbb{Z},\\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

La idea subyacente a este procedimiento se basa en simplificar dentro de lo posible las derivadas parciales del factor integrante.

Cuando el factor integrante buscado depende tan sólo de una de las variables, puede darse una fórmula explícita para calcularlo. Por ejemplo, si $r(x,y) = \phi(x)$ se tiene que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \phi'(x), \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

Imponiendo la condición de exactitud, resulta que

$$M\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial r}{\partial x} + r\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \phi(x)\frac{\partial M}{\partial y} = N\phi'(x) + \phi(x)\frac{\partial N}{\partial x},$$

de donde obtenemos la ecuación de variables separadas

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x),$$

siendo

$$g(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Para que este proceso tenga sentido, el miembro de la derecha de la expresión anterior debe ser una función que sólo dependa de la variable x. Resolviendo la ecuación,

obtenemos la expresión del factor integrante:

$$\phi(x) = e^{\int g(x)dx}.$$

Por supuesto, el cálculo explícito de $\phi(x)$ sólo podrá llevarse a cabo si sabemos calcular una primitiva de la función $g(x)$.

Si el factor integrante sólo depende de la variable y, razonando de modo análogo llegamos a la siguiente expresión:

$$\phi(y) = e^{\int h(y)dy},$$

donde

$$h(y) = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Ejemplo 2.15. Consideremos la ecuación del ejemplo anterior:

$$(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0,$$

y veamos cómo se obtiene el factor integrante $r(x, y) = x^{-2}$.

Comencemos probando con un factor integrante de la forma $r(x, y) = \phi(x)$, esto es, la función $r(x, y)$ dependerá únicamente de la variable x. Entonces el candidato a factor integrante será de la forma

$$\phi(x) = e^{\int g(x)dx},$$

donde

$$g(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-2xy}(2y - (-2y)) = -\frac{2}{x}.$$

Por tanto, el factor integrante buscado será

$$\phi(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}. \qquad \square$$

En el siguiente ejemplo se presenta un caso en que el primer candidato a factor integrante no es válido.

Ejemplo 2.16. Sea la ecuación diferencial

$$(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0,$$

que no es exacta (como puede comprobarse fácilmente).

Busquemos un factor integrante de la forma $r(x, y) = \phi(x)$. En tal caso,

$$g(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{7 - 3xy^2}\left((4xy - 9y^2) - (-3y^2)\right) = \frac{2y}{7 - 3xy^2}(2x - 3y).$$

Esta expresión no tiene sentido, ya que el segundo miembro depende explícitamente también de la variable y. En consecuencia, no es posible utilizar un factor integrante que sólo dependa de x.

Si probamos con un factor del tipo $r(x,y) = \phi(y)$, obtenemos

$$h(y) = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{2y}{2xy^2 - 3y^3}(2x - 6y) = -\frac{2}{y}.$$

La expresión obtenida sólo depende de la variable y, por lo que podemos considerar el factor integrante

$$\phi(y) = e^{\int h(y)dy} = e^{-\frac{2}{y}dy} = y^{-2}.$$

Resolvamos ahora la ecuación diferencial

$$(2xy^2 - 3y^3)y^{-2}\,dx + (7 - 3xy^2)y^{-2}\,dy = 0 \Rightarrow (2x - 3y)\,dx + (7y^{-2} - 3x)\,dy = 0,$$

que es exacta. Un potencial es, en este caso, $E(x,y) = x^2 - 3xy - 7y^{-1}$, y la solución general de la ecuación diferencial es, por tanto,

$$x^2 - 3xy - 7y^{-1} = C. \qquad \square$$

Finalizamos esta sección con un ejemplo donde se juega con un factor integrante algo más complicado que los vistos en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 2.17. Consideremos la ecuación diferencial no exacta

$$(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0.$$

La prueba con los candidatos usuales a factor integrante no da buen resultado. En este caso, el factor integrante a buscar es de la forma $r(x,y) = \phi(x + y^2)$. Consideremos pues la ecuación modificada

$$(3y^2 - x)r(x,y)\,dx + (2y^3 - 6xy)r(x,y)\,dy = 0.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \phi'(x + y^2), \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = 2y\phi'(x + y^2),$$

la condición de exactitud nos da

$$2y(3y^2 - x)\phi'(x + y^2) + 6y\phi(x + y^2) = (2y^3 - 6xy)\phi'(x + y^2) - 6y\phi(x + y^2),$$

de donde

$$4y(x + y^2)\phi'(x + y^2) = -12y\phi(x + y^2) \Rightarrow (x + y^2)\phi'(x + y^2) = -3\phi(x + y^2).$$

Como vemos, la última expresión obtenida es una ecuación diferencial en $x + y^2$. Si llamamos $z = x + y^2$, tenemos

$$z\phi'(z) = -3\phi(z) \Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi} = -3 \int \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln(\phi) = -3\ln(z) = \ln(z^{-3}) \Rightarrow \phi(z) = z^{-3}.$$

Por tanto, el factor integrante buscado es

$$r(x, y) = \phi(x + y^2) = (x + y^2)^{-3}.$$

La ecuación exacta equivalente a considerar es, por tanto,

$$(3y^2 - x)(x + y^2)^{-3}\, dx + (2y^3 - 6xy)(x + y^2)^{-3}\, dy = 0.$$

Una función potencial es $E(x, y) = (x - y^2)(x + y^2)^{-2}$, así que la solución general de la ecuación diferencial será

$$\frac{x - y^2}{(x + y^2)^2} = C. \qquad \square$$

2.6. Problemas de valor inicial

Hemos visto que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden, que supondremos escrita en forma normal:

$$y' = f(x, y),$$

depende de una constante arbitraria C, esto es, $y \equiv y(x, C)$. En particular, la ecuación diferencial posee un número infinito de soluciones, aunque todas ellas se diferencian únicamente en el valor de la constante C.

Supongamos que estamos interesados en elegir, de entre todas las posibles soluciones, aquella que en el punto a toma un cierto valor y_0. En tal caso, estamos ante un *problema de valor inicial* o *problema de Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

La condición $y(a) = y_0$ se denomina *condición inicial*. Bajo hipótesis adecuadas de regularidad sobre la función $f(x, y)$, puede demostrarse que *el problema de valor inicial posee una única solución*. El valor correspondiente de la constante C se determina imponiendo la condición inicial en la solución general; dicho de otro modo, hay que resolver la ecuación $y(a, C) = y_0$.

Ejemplo 2.18. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 2xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación $y' = 2xy$ es, según vimos en el ejemplo 2.3,

$$y(x, C) \equiv y = Ce^{x^2}.$$

Imponiendo la condición inicial, resulta:

$$y(0) = 1 \Rightarrow Ce^{0^2} = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Por tanto, la *única* solución del problema de valor inicial es

$$y = e^{x^2}.$$

El siguiente código resuelve el problema de valor inicial en Sage:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == 2*x*y
sage: sol = desolve(ec, y, ics=[0, 1]) # ics=[a, y(a)]
sage: sol
e^(x^2)
```

Es posible representar gráficamente esta solución de forma muy simple. Si, por ejemplo, queremos dibujarla en el intervalo $[0, 1]$, hacemos:

```
sage: plot(sol, [0, 1])
```

para obtener el resultado de la figura 2.1. □

No todo problema de valor inicial tiene solución, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.19. Consideremos la ecuación de variables separables $y' = -x/y$ y calculemos su solución general:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c.$$

Esta solución en forma implícita puede reescribirse como

$$x^2 + y^2 = C,$$

donde $C = 2c$ representa una constante arbitraria. Despejando la variable y, se obtienen dos ramas de soluciones (figura 2.2):

$$y = \sqrt{C - x^2}, \qquad y = -\sqrt{C - x^2}.$$

El correspondiente código Sage para resolver la ecuación es:

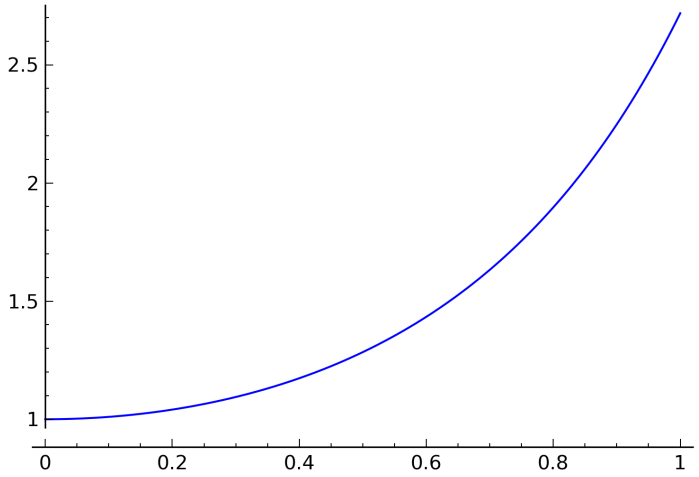


Figura 2.1: Solución del ejemplo 2.18 en el intervalo $[0,1]$.

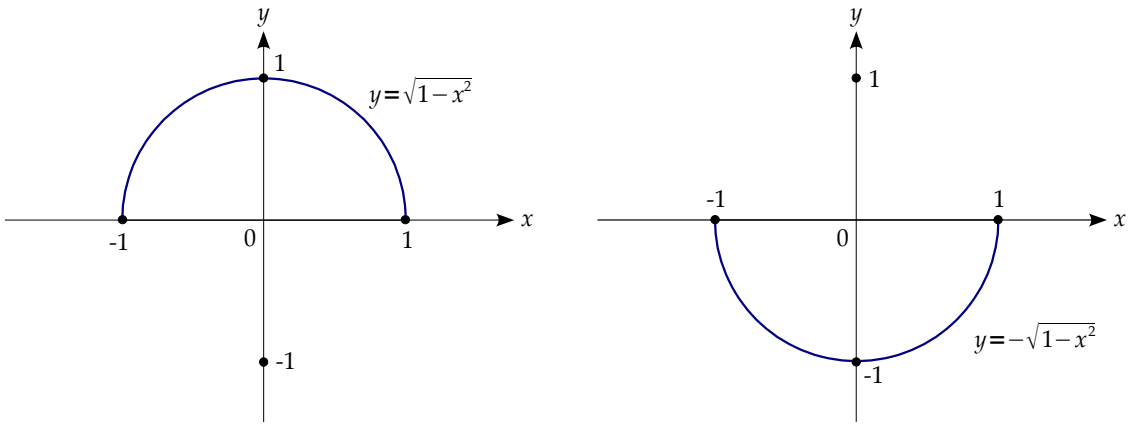


Figura 2.2: Las dos ramas de solución para $C = 1$, definidas en $I = (-1,1)$.

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == -x/y
sage: desolve(ec, y)
-1/2*y(x)^2 == 1/2*x^2 + c
```

Como vemos, la solución viene dada en forma implícita. Si queremos despejar la solución y, primero guardamos el resultado anterior en una variable, que llamaremos `sol`:

```
sage: sol = desolve(ec, y); sol
-1/2*y(x)^2 == 1/2*x^2 + c
```

A continuación, usamos el comando `solve` para despejar `y`:

```
sage: solve(sol, y)
[y(x) == -sqrt(-x^2 - 2*c), y(x) == sqrt(-x^2 - 2*c)]
```

Tomemos la condición inicial $y(0) = 1$, que implica $C = 1$. Debido a la situación del punto $(0,1)$ debemos tomar la primera rama, por lo que la solución del problema de valor inicial corresponde a la semicircunferencia superior: $y = \sqrt{1-x^2}$. Dicha solución es regular en el intervalo $I = (-1,1)$. En este caso, el problema posee una única solución.

Razonando de manera análoga, la solución del problema de valor inicial con condición inicial $y(0) = -1$ sería $y = -\sqrt{1-x^2}$, que es regular en el intervalo $I = (-1,1)$. También en este caso la solución del problema es única.

Consideremos ahora la condición inicial $y(1) = 0$, que también implica $C = 1$. En este caso podríamos tomar cualquiera de las dos ramas, ya que ambas pasan por el punto $(1,0)$. Sin embargo, ninguna de ellas es solución, ya que falla la derivabilidad en $x = 1$. En efecto, la derivada de y es

$$y'(x) = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

que sólo está definida si $x \in (-1,1)$. En consecuencia, el problema de valor inicial correspondiente no tiene solución. □

Aun en el caso de que un problema de valor inicial tenga solución, ésta no tiene por qué ser única.

Ejemplo 2.20. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = (x+1)y^{2/3}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Podemos comprobar fácilmente que la función

$$y(x) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}\right)\right]^3$$

es solución del problema. Por otra parte, notemos que la función idénticamente nula $y(x) \equiv 0$ también es solución. Tenemos pues dos soluciones distintas del mismo problema de valor inicial.

En este caso, Sage sólo determina la solución no nula:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y',x)
sage: ec = diff(y,x) == (x+1)*y^(2/3)
sage: desolve(ec, y, ics=[1,0])
3*y(x)^(1/3) == 1/2*x^2 + x - 3/2
```

□

Finalizamos esta sección con un resultado fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales que nos permite dilucidar la existencia y unicidad de solución local de un problema de valor inicial.

Teorema (de existencia y unicidad)**.** *Si la función $f(x,y)$ es continua en un entorno del punto (x_0,y_0), entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

tiene alguna solución local. Si además existe $\frac{\partial f}{\partial y}$ y es continua en un entorno de (x_0,y_0), entonces la solución del problema es única.

Ejemplo 2.21. Consideremos de nuevo la ecuación diferencial del ejemplo 2.19. En este caso, la función $f(x,y)$ es

$$f(x,y) = -\frac{x}{y},$$

que no es continua (de hecho, ni siquiera está definida) cuando $y = 0$.

Tomemos como condición inicial $y(0) = 1$. Como la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(x_0,y_0) = (0,1)$, el teorema asegura que el problema de Cauchy correspondiente posee alguna solución. Por otra parte, la derivada de $f(x,y)$ respecto de la variable y es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y^2},$$

que también es continua en $(0,1)$. En consecuencia, y según el teorema, la solución del problema de Cauchy es única. De hecho, vimos que dicha solución era

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Obsérvese que la solución es local, ya que está definida solamente en el intervalo $(-1,1)$.

Consideremos ahora la condición inicial $y(1) = 0$ y observemos que la función $f(x,y)$ no es continua en el punto $(1,0)$. Sin embargo, no podemos afirmar que el problema carezca de solución, ya que el teorema sólo proporciona una condición suficiente, pero no necesaria, para la existencia de solución. Para determinar si hay o no solución tendríamos que proceder como en el ejemplo 2.19, analizando directamente el problema de Cauchy. En este caso el problema no tenía solución. □

Ejemplo 2.22. Consideremos el problema de Cauchy del ejemplo 2.20. En este caso, la función

$$f(x,y) = (x+1)y^{2/3}$$

es continua en todo punto, por lo que el problema posee solución. Sin embargo, notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}(x+1)y^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{y}}$$

no es continua en $(1,0)$. No podemos por tanto aplicar el teorema para asegurar la unicidad de solución, sino que habría que analizar el problema como se hizo en el ejemplo 2.19. De hecho, vimos que el problema de Cauchy poseía dos soluciones distintas. □

2.7. Aplicaciones

2.7.1. Espejos parabólicos

Nos planteamos el problema de determinar la forma que debe tener un espejo para que los rayos reflejados por éste se concentren en un punto. Para simplificar el problema, haremos las siguientes suposiciones:

1. El sistema está contenido en el plano x-y.
2. Los rayos se concentran en el origen de coordenadas.
3. Los rayos incidentes son paralelos al eje y.
4. La forma del espejo viene dada por una curva del tipo $y(x)$.

En la figura 2.3 se representa un esquema del planteamiento geométrico del problema.

En el caso de un espejo plano, un rayo que incide con ángulo α se refleja con el mismo ángulo. Cuando el espejo es curvo se cumple una ley de reflexión análoga, considerando el ángulo que forma el rayo con la recta tangente a la curva que define el espejo en el punto donde incide el rayo. Esta ley física es la que vamos a utilizar para obtener una ecuación diferencial asociada al problema.

Consideremos pues la figura 2.4, donde un rayo paralelo al eje y se refleja en el punto (x,y) del espejo; α representa el ángulo de incidencia del rayo, que coincide con el ángulo del rayo reflejado; θ es el ángulo que forma el rayo reflejado con el eje x; β es el ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto (x,y) con el eje x.

A partir del triángulo formado por el origen, el punto (x,y) y el corte de la recta tangente a la curva con el eje y (sombreado en la figura 2.4), podemos determinar la relación que existe entre α y θ:

$$\alpha + \alpha + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

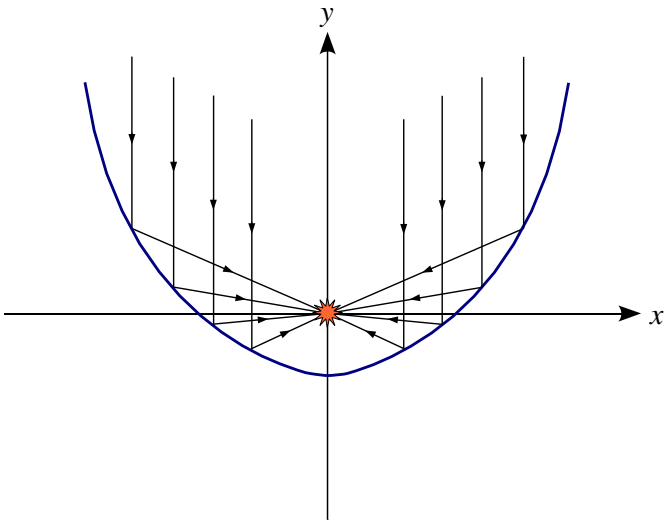


Figura 2.3: Planteamiento del problema de los espejos parabólicos.

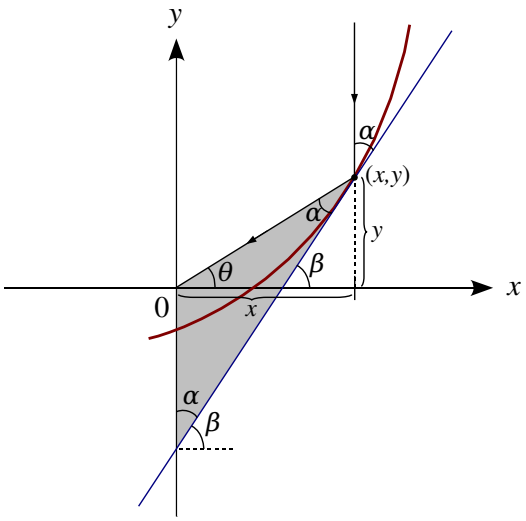


Figura 2.4: Esquema del problema del espejo.

Considerando de nuevo el mismo triángulo, y teniendo en cuenta la definición geométrica de la tangente de un ángulo, podemos escribir

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Por tanto,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \operatorname{cotg}(2\alpha).$$

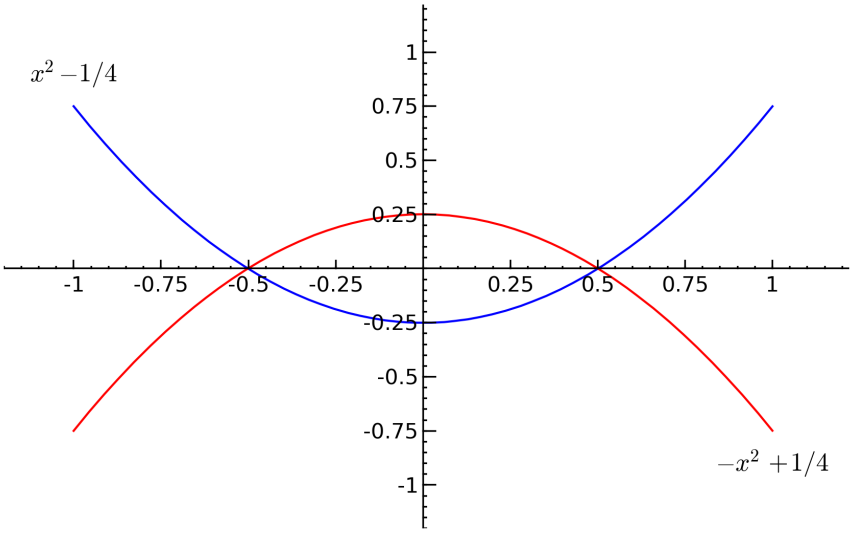


Figura 2.5: Espejos parabólicos $y = x^2 - 1/4$, $y = -x^2 + 1/4$.

Por otra parte, la derivada $y'(x)$ se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva buscada en el punto (x, y), que es precisamente la tangente del ángulo β:

$$y' = \operatorname{tg}(\beta).$$

Vemos en la figura 2.4 que

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

y por tanto

$$y' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}(\alpha).$$

Podemos determinar la relación existente entre $\operatorname{cotg}(\alpha)$ y $\operatorname{cotg}(2\alpha)$:

$$\operatorname{cotg}(2\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{\operatorname{cotg}^2(\alpha) - 1}{2\operatorname{cotg}(\alpha)}.$$

Combinando los resultados anteriores, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{(y')^2 - 1}{2y'} = \frac{y}{x}.$$

Al despejar y' aparecen dos formas normales para la ecuación:

$$x(y')^2 - 2yy' - x = 0 \Rightarrow y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad y' = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Es inmediato comprobar que las dos ecuaciones obtenidas son homogéneas, así que podemos resolverlas mediante el cambio $z = y/x$. En ambos casos, la solución de la ecuación es la misma:

$$y = Cx^2 - \frac{1}{4C},$$

donde, como es usual, C representa una constante arbitraria. En el caso en que C sea positiva la solución es una parábola convexa, mientras que si C es negativa la parábola es cóncava. En la figura 2.5 se representan los espejos que se obtienen para $C = \pm 1$. □

2.7.2. Campos de fuerza conservativos

En este apartado vamos a motivar el estudio de las ecuaciones exactas, así como de su método de resolución, mediante el análisis de un problema de Física: el cálculo de las curvas equipotenciales de un campo de fuerzas conservativo.

Supongamos que en el plano x-y actúa un campo de fuerzas vectorial de la forma

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath} \equiv (P(x,y), Q(x,y)),$$

donde $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ son los vectores de coordenadas unitarios ($\vec{\imath} = (1,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1)$), y $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones suficientemente regulares. Queremos desplazar una partícula por el plano de forma que el campo de fuerzas no ejerza ningún trabajo sobre ella en todos los puntos de la trayectoria. Las trayectorias que verifican esta propiedad se conocen con el nombre de *curvas equipotenciales*.

Sea $y(x)$ la curva equipotencial buscada y sea ω el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$. Si llamamos $\vec{e}$ al vector de desplazamiento de la partícula (vector tangente a la trayectoria), el trabajo ω puede expresarse como un producto escalar de $\vec{F}$ por $\vec{e}$:

$$\omega = \vec{F} \cdot \vec{e} = \|\vec{F}\| \, \|\vec{e}\| \cos(\vec{F}, \vec{e}).$$

Aquí $\cos(\vec{F}, \vec{e})$ representa el ángulo formado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{e}$, mientras que $\|\cdot\|$ es el módulo del vector correspondiente. La condición de que el trabajo sea nulo, $\omega = 0$, es equivalente a que $\cos(\vec{F}, \vec{e}) = 0$ o, lo que es lo mismo, a que los vectores $\vec{F}$ y $\vec{e}$ sean ortogonales: $\vec{F} \perp \vec{e}$. A su vez, esta condición equivale a que el producto de las pendientes determinadas por ambos vectores sea -1.

En un punto arbitrario $(x, y(x))$ de la curva equipotencial, la fuerza ejercida por el campo viene dada por el vector

$$\vec{F}(x, y(x)) = P(x, y(x))\vec{\imath} + Q(x, y(x))\vec{\jmath},$$

cuya pendiente (supuesto $P(x, y(x)) \neq 0$), es

$$\frac{Q(x, y(x))}{P(x, y(x))}.$$

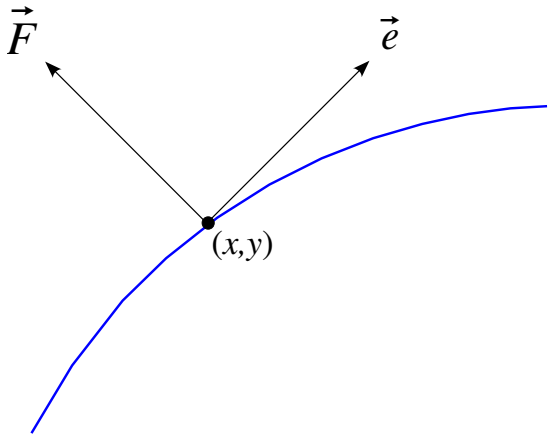


Figura 2.6: Curva equipotencial, vector desplazamiento y vector fuerza.

Por otra parte, la pendiente del vector de desplazamiento $\vec{e}$ es simplemente $y'(x)$. Por tanto, la condición $\vec{F} \perp \vec{e}$ se escribe entonces como

$$y'(x) = -\frac{P(x,y(x))}{Q(x,y(x))},$$

sobre cada punto $(x,y(x))$ de la trayectoria. Escribiendo simplemente y en lugar de $y(x)$, la ecuación anterior puede expresarse como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

o, en forma diferencial,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Se dice que un campo de fuerzas $\vec{F}$ es *conservativo* si deriva de un potencial, es decir, si existe una función escalar $E(x,y)$ tal que

$$\vec{\nabla} E = -\vec{F},$$

donde $\vec{\nabla} E$ es el vector gradiente de E,

$$\vec{\nabla} E = \frac{\partial E}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E}{\partial y}\vec{\jmath}.$$

Esta condición puede expresarse también en términos de las componentes:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -P(x,y), \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = -Q(x,y).$$

Si el campo $\vec{F}$ es conservativo, las curvas equipotenciales son precisamente las curvas $y(x)$ definidas de forma implícita por la ecuación

$$E(x, y(x)) = C,$$

con C constante. En efecto, derivando implícitamente respecto de x en la ecuación anterior, se tiene que

$$0 = \frac{d}{dx}E(x, y(x)) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial E}{\partial y}(x, y(x)) = P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x),$$

de donde deducimos que $y(x)$ verifica la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Ejemplo 2.23. Consideremos el campo de fuerzas gravitatorio

$$\vec{F}(x, y) = (0, -mg),$$

donde m representa la masa de una partícula que se mueve en un plano y g es la constante gravitatoria. Las curvas equipotenciales son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0}{-mg} = 0,$$

que son precisamente $y(x) = C$, con C constante. En este caso, las curvas equipotenciales son rectas horizontales.

Vamos a llegar al mismo resultado mediante el uso de una función potencial. Para ello, consideremos la función de energía potencial $E(x, y) = mgy$ que, efectivamente, es un potencial:

$$\overrightarrow{\nabla} E = 0\vec{\imath} + mg\vec{\jmath} = \vec{F}.$$

Por tanto, las curvas equipotenciales son de la forma

$$E(x, y(x)) = C \Rightarrow mgy(x) = C \Rightarrow y(x) = \frac{C}{mg} \equiv C,$$

donde en el último paso hemos renombrado la constante arbitraria C. □

Una cuestión crucial es la siguiente: ¿cómo determinar si un campo es conservativo? Notemos que si el campo $\vec{F}$ es conservativo entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Puede demostrarse (aunque eso está fuera del alcance de este curso) que, bajo determinadas condiciones de regularidad sobre $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ (que siempre se verificarán en los casos que trataremos), el recíproco es asimismo cierto. En conclusión,

podemos afirmar que el campo $\vec{F}$ es conservativo si y sólo si se verifica la igualdad anterior:

$$\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} \text{ es conservativo} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En el caso en que $\vec{F}$ sea conservativo, para calcular una función potencial E debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = -P(x,y), \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = -Q(x,y), \end{cases}$$

lo cual, en general, no será posible salvo en casos muy sencillos.

Observación. El signo negativo en la definición de función potencial obedece, como hemos visto, a consideraciones de tipo puramente físico. Desde un punto de vista matemático, dicho signo es irrelevante: por eso en la definición de exactitud que hicimos en la sección 2.4 tomamos $M = -P$ y $N = -Q$. □

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de una función potencial.

Ejemplo 2.24. El campo de fuerzas

$$\vec{F}(x,y) = -x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$$

es conservativo, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Para calcular una función potencial, planteamos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = -P(x,y) = -(-x) = x, \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = -Q(x,y) = -(-y) = y. \end{cases}$$

Tomemos una de las dos ecuaciones, por ejemplo la primera, e integremos respecto de x:

$$E(x,y) = \int \frac{\partial E}{\partial x}\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + g(y).$$

Observemos que, al estar integrando la función de dos variables $E(x,y)$ respecto de la variable x, la "constante" de integración que aparece no es realmente una constante, sino una función de la variable y. En efecto, para cualquier función $g(y)$ se verifica

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} + g(y)\right) = x \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = x.$$

Para determinar $g(y)$ recurrimos a la segunda ecuación. Por una parte, derivando en la expresión obtenida para $E(x,y)$ respecto de y, obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + g(y)\right) = g'(y).$$

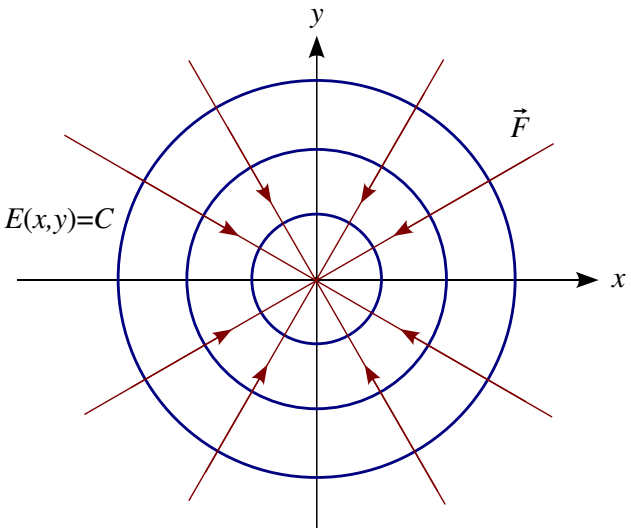


Figura 2.7: Curvas equipotenciales y campo de fuerzas del ejemplo 2.24.

Sustituyendo ahora en la segunda ecuación, resulta

$$g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2}.$$

Como buscamos un valor particular de $g(y)$, no añadimos constante de integración en el cálculo anterior. Finalmente, el potencial buscado es

$$E(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Las curvas equipotenciales son entonces las circunferencias de la forma

$$x^2 + y^2 = C,$$

siendo C una constante arbitraria. En la figura 2.7 se representan las curvas equipotenciales y el campo vectorial $\vec{F}$. □

2.7.3. Calentamiento de edificios

Vamos a estudiar un modelo que describe la evolución de la temperatura en el interior de un edificio. Para ello, denotemos por $T(t)$ dicha temperatura en el instante de tiempo t. Supondremos que las variaciones de temperatura dependen de tres factores: la temperatura exterior, el calor generado en el interior del edificio y el efecto del sistema de calefacción o de aire acondicionado. De forma más específica:

- El calor producido por las personas, luces, maquinaria, etc. en el interior del edificio causan un incremento de la temperatura que denotaremos por $H(t)$, siendo esta función no negativa.
- Las variaciones de temperatura producidas por el sistema de calefacción/refrigeración se representan mediante una función $U(t)$, que será positiva para la calefacción y negativa para el aire acondicionado.
- Por último, hay que considerar el efecto de la temperatura exterior $T_e(t)$ sobre el edificio. Factores experimentales muestran que este efecto puede modelizarse usando la *ley del enfriamiento de Newton*, que establece que el ritmo de cambio de la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior $T_e(t)$ y la interior $T(t)$.

Expresando en términos matemáticos los puntos anteriores, podemos considerar la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_e(t) - T(t)) + H(t) + U(t).$$

El ritmo de cambio de la temperatura $T(t)$ se expresa mediante su derivada respecto del tiempo, $\frac{dT}{dt}$. La constante de proporcionalidad k se supone positiva y depende de las propiedades físicas del edificio: número de puertas y ventanas, tipo de aislamiento, etc.

Observación. Respecto a las unidades de medida, supondremos que la temperatura viene dada en grados Celsius (°C) y el tiempo en horas (h); en consecuencia, la variación de temperatura $\frac{dT}{dt}$ se mide en °C/h. La constante k tiene como unidad h^{-1}. En general, las funciones $H(t)$ y $U(t)$ se expresan en términos de energía por unidad de tiempo, kcal/h. Si embargo, multiplicando ambas cantidades por la capacidad calorífica del edificio (cuyas unidades son °C/kcal), podemos suponer que tanto $H(t)$ como $U(t)$ vienen dadas en °C/h. □

Observación. Supongamos que $H(t) \equiv 0$ y $U(t) \equiv 0$, por lo que la ecuación se reduce a

$$\frac{dT}{dt} = k(T_e(t) - T(t))$$

(esta es la expresión de la ley de Newton). Cuando la temperatura exterior es mayor que la interior, $T_e(t) - T(t) > 0$, se tiene que $T'(t) > 0$, lo que significa que $T(t)$ es una función creciente: la temperatura del edificio se incrementa. Si, por el contrario, la temperatura exterior es menor que la interior, $T_e(t) - T(t) < 0$, entonces $T'(t) < 0$, por lo que la temperatura del edificio disminuye. □

Observación. El valor $K = 1/k$ se denomina *constante de tiempo del edificio*, y representa el tiempo que se necesita para que la temperatura del edificio cambia de forma sustancial. Un valor típico podría estar entre dos y cuatro horas, aunque puede ser mucho menor si se abren las ventanas o se utilizan ventiladores; por el contrario, la constante de tiempo puede ser mucho mayor si el edificio está bien aislado. □

Si reescribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dT}{dt} = -kT(t) + kT_e(t) + H(t) + U(t),$$

queda claro que es de tipo *lineal*, por lo que podemos resolverla usando el método de variación de la constante. En primer lugar, determinamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{dT}{dt} = -kT \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = -\int k\,dt \Rightarrow \ln(T) = -kt + c \Rightarrow T_H(t, C) = Ce^{-kt},$$

donde hemos sustituido e^c por una constante arbitraria C. A continuación, buscamos una solución particular de la forma $T_P(t) = C(t)e^{-kt}$; sustituyendo en la ecuación, resulta:

$$C'(t)e^{-kt} - \cancel{kC(t)e^{-kt}} = -\cancel{kC(t)e^{-kt}} + kT_e(t) + H(t) + U(t) \Rightarrow$$
$$C'(t) = e^{kt}(kT_e(t) + H(t) + U(t)) \Rightarrow C(t) = \int e^{kt}(kT_e(t) + H(t) + U(t))\,dt,$$

de donde

$$T_P(t) = e^{-kt} \int e^{kt}(kT_e(t) + H(t) + U(t))\,dt.$$

Por último, la solución general de la ecuación completa será

$$T(t, C) \equiv T(t) = e^{-kt}\left(\int e^{kt}(kT_e(t) + H(t) + U(t))\,dt + C \right).$$

Para completar el modelo, es necesario conocer la temperatura inicial del edificio, esto es, hay que considerar una condición inicial de la forma

$$T(0) = T_0,$$

donde T_0 es la temperatura del edificio en el instante inicial $t = 0$. Imponiendo esta condición inicial en la solución general, es posible determinar el valor de la constante de integración C.

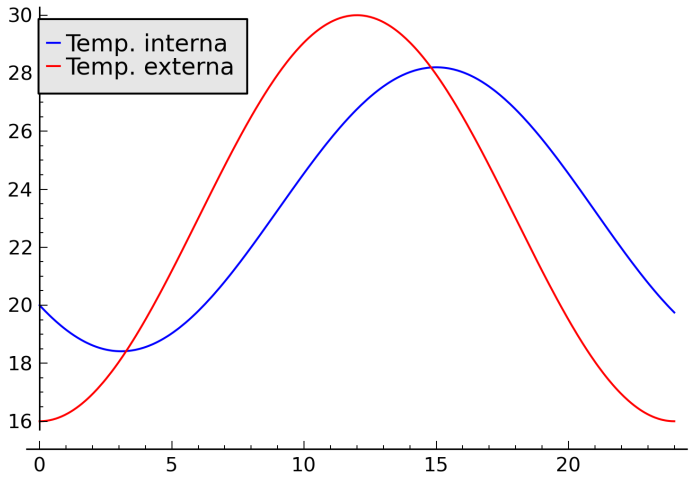


Figura 2.8: Temperatura interior: $T(t)$. Temperatura exterior: $T_e(t)$.

Ejemplo 2.25. Consideremos un edificio en el que el ritmo de calor adicional $H(t) \equiv \frac{\pi}{48}$ °C/h es constante y no se usa calefacción ni aire acondicionado: $U(t) \equiv 0$. Supongamos que la temperatura exterior varía según la función

$$T_e(t) = 23 - 7\cos\left(\tfrac{\pi}{12}t\right),$$

esto es, se supone que la temperatura exterior cambia de forma sinusoidal en un período de 24 horas, con su mínimo en $t = 0$ (medianoche) y su máximo en $t = 12$ (mediodía). Supongamos asimismo que $k = \frac{\pi}{12}\ \mathrm{h}^{-1}$, por lo que la constante de temperatura del edificio, $1/k$, es aproximadamente de cuatro horas. La situación descrita podría corresponder a la primavera, cuando no usamos ni la calefacción ni el aire acondicionado y las variaciones de temperatura son suaves.

En este caso, la temperatura interior del edificio viene dada por la siguiente función:

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-kt}\left(\int e^{kt}(kT_e(t) + H_0)\,dt + C\right) \\ &= e^{-kt}\left(-7k\int e^{kt}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}t\right)dt + (23k + H_0)\int e^{kt}\,dt + C\right). \end{aligned}$$

Integrando por partes el primer sumando y sustituyendo los valores de k y H_0, obtenemos:

$$T(t) = \tfrac{93}{4} - \tfrac{7}{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}t\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}t\right)\right) + Ce^{-\frac{\pi}{12}t}.$$

Supongamos ahora que la temperatura inicial (esto es, a medianoche) en el interior del edificio es de 20 °C. Imponiendo esta condición sobre $T(t)$, podemos calcular el valor de la constante de integración C:

$$T(0) = 20 \Rightarrow \tfrac{93}{4} - \tfrac{7}{2} + C = 20 \Rightarrow C = \tfrac{1}{4}.$$

La solución del problema de valor inicial es, finalmente,

$$T(t) = \frac{93}{4} - \frac{7}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) + \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{12}t}.$$

En la figura 2.8 se muestran las evoluciones de las temperaturas interior y exterior del edificio durante un período de 24 horas.

Damos a continuación un código Sage para resolver el problema y representar gráficamente tanto la solución $T(t)$ como la evolución de la temperatura exterior $T_e(t)$.

```
sage: var('t')
sage: k = pi/12
sage: Te = 23-7*cos(pi*t/12)
sage: H = pi/48
sage: U = 0
sage: T = function('T', t)
sage: ec = diff(T, t) == k*(Te-T) + H + U
sage: sol = desolve(ec, T, ics=[0, 20])
sage: expand(sol)
1/4*e^(-1/12*pi*t) - 7/2*sin(1/12*pi*t) - 7/2*cos(1/12*pi*t) + 93/4
sage: # Dibujamos
sage: fig1 = plot(sol, t, 0, 24, color='blue',
      legend_label='Temp. interna') # figura para T
sage: fig2 = plot(Te, t, 0, 24, color='red',
      legend_label='Temp. externa') # figura para Te
sage: fig = fig1 + fig2 # unimos ambas figuras
sage: show(fig) # mostramos el resultado
```

El parámetro `legend_label` dentro de la instrucción `plot` se ha utilizado para etiquetar las gráficas. El resultado obtenido puede verse en la figura 2.8.

Supongamos que queremos determinar la temperatura máxima que se alcanza en el interior del edificio durante un periodo de 24 horas. Para ello, podemos usar el siguiente comando:

```
sage: sol.find_maximum_on_interval(0, 24)
(28.204675639897779, 14.996195034422906)
```

El primer número corresponde al valor máximo de la temperatura y el segundo al instante en que éste se alcanza. De forma análoga, para determinar la temperatura mínima, hacemos

```
sage: sol.find_minimum_on_interval(0, 24)
(18.412953900017136, 3.086010596200699)
```

Como vemos, los resultados son consistentes con la representación gráfica de la solución. □

CAPÍTULO

3

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1. Introducción

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* es una ecuación que relaciona una variable independiente x con una variable dependiente $y \equiv y(x)$ y sus derivadas hasta el orden n. Su forma general es la siguiente:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in [a, b].$$

La ecuación está escrita en *forma normal* si la derivada de orden n aparece despejada:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad x \in [a, b].$$

Una *solución* de la ecuación diferencial es una función $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface la ecuación en cada punto $x \in [a, b]$. Dicha función ha de ser *regular*, en el sentido de ser derivable tantas veces como indique el orden de la ecuación, siendo continuas todas las derivadas; en tal caso se dice que $y(x)$ es una función de clase $C^n([a, b])$.

Ejemplo 3.1. La función $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $y(x) = \operatorname{sen}(2x)$ es solución de la ecuación diferencial de orden dos (o segundo orden)

$$y'' = -4y.$$

En primer lugar, notemos que la función $y(x)$ es de clase dos, ya que tanto $y'(x) = 2\cos(2x)$ como $y''(x) = -4\,\mathrm{sen}(2x)$ son funciones continuas. Además, se verifica la ecuación para cada punto $x \in \mathbb{R}$:

$$y''(x) = -4\,\mathrm{sen}(2x) = -4y(x).$$

Es inmediato hacer la comprobación anterior usando Sage:

```
sage: var('x')
sage: y = sin(2*x)
sage: diff(y, x, 2) + 4*y
0
```

□

La *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es una familia de funciones que determinan *todas* las posibles soluciones de la ecuación. Dicha solución general depende de n parámetros o constantes arbitrarias: $y \equiv y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Ejemplo 3.2. La solución general de la ecuación diferencial $y'' = -4y$ es

$$y = C_1\,\mathrm{sen}(2x) + C_2\cos(2x),$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Es fácil comprobar que todas las funciones de esta forma verifican la ecuación diferencial; más adelante veremos que estas son todas las posibles soluciones.

Veamos cómo usar Sage para hacer la comprobación:

```
sage: var('x, C1, C2')
sage: y = C1*sin(2*x) + C2*cos(2*x)
sage: diff(y, x, 2) + 4*y
0
```

También podemos resolver la ecuación directamente:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) == -4*y
sage: desolve(ec, y)
k1*sin(2*x) + k2*cos(2*x)
```

□

Dada una ecuación diferencial de orden n (que supondremos escrita en forma normal), podemos complementarla con n *condiciones iniciales* que establecen los valores que deben tomar la solución y sus derivadas en un cierto punto. Estamos entonces ante lo que se denomina un *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy*. Su forma es la siguiente:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \\ y'(a) = y_1, \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}, \end{cases}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son datos del problema. Nótese que un problema de valores iniciales posee, en general, solución única. Para determinarla, primero se obtiene la solución general de la ecuación, que dependerá de n constantes arbitrarias, y luego se determina el valor de las constantes utilizando las condiciones iniciales.

Ejemplo 3.3. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' = -4y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Como vimos en el ejemplo anterior, la solución general de la ecuación $y'' = -4y$ es

$$y = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x).$$

Determinemos C_1 y C_2 usando las condiciones iniciales. Por un lado, usando la primera condición inicial tenemos que

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 \operatorname{sen} 0 + C_2 \cos 0 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Como $y'(x) = 2C_1 \cos(2x) - 2C_2 \operatorname{sen}(2x)$, de la segunda condición deducimos que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 2C_1 \cancelto{1}{\cos 0} - 2C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen} 0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Por tanto, la única solución del problema del problema de valores iniciales es

$$y = \cos(2x).$$

El código Sage correspondiente es el siguiente:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) == -4*y
sage: desolve(ec, y, ics=[0, 1, 0]) # ics=[a, y0, y0']
cos(2*x)
```

□

En este capítulo centraremos nuestro estudio en ecuaciones de segundo orden, cuya forma general es

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

y su forma normal es

$$y'' = f(x, y, y').$$

Como hemos comentado anteriormente, la solución general de la ecuación dependerá de dos constantes arbitrarias:

$$y \equiv y(x, C_1, C_2).$$

Un problema de valores iniciales adopta la forma

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \\ y'(a) = y_0', \end{cases}$$

donde $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ son datos del problema.

3.2. Ecuaciones reducibles a primer orden

En esta sección estudiaremos dos tipos de ecuaciones de segundo orden que, mediante un cambio adecuado de variables, pueden transformarse en ecuaciones de primer orden. Estas clases de ecuaciones son aquellas en las que no aparece, de forma explícita, la variable dependiente o la variable independiente.

3.2.1. Ecuaciones en las que no aparece la variable dependiente

Consideremos una ecuación de de la forma

$$y'' = F(x, y'),$$

que no depende explícitamente de la variable dependiente y. Mediante el cambio de variable dependiente $z = y'$ podemos transformarla en una ecuación de primer orden:

$$z' = F(x, z),$$

teniendo en cuenta que $y'' = z'$.

Ejemplo 3.4. Consideremos la ecuación

$$y'' = -2y',$$

en la que no aparece de forma explícita la variable dependiente y. Hagamos el cambio $z = y'$ para obtener una ecuación de primer orden:

$$z' = -2z.$$

Podemos resolver esta ecuación mediante separación de variables:

$$\int \frac{dz}{z} = -2 \int dx \Rightarrow \ln(z) = -2x + C \Rightarrow z = C_1 e^{-2x},$$

donde $C_1 = e^C$. Ahora deshacemos el cambio $z = y'$ mediante integración directa:

$$y' = z = C_1 e^{-2x} \Rightarrow y = C_1 \int e^{-2x} dx = -\frac{C_1}{2} e^{-2x} + C_2,$$

donde C_2 es una constante de integración. Renombrando la constante C_1, obtenemos finalmente la solución general de la ecuación de segundo orden:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2. \qquad \square$$

Ejemplo 3.5. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$xy'' = y' + (y')^3.$$

Haciendo el cambio $z = y'$, obtenemos la ecuación

$$xz' = z + z^3,$$

que es de primer orden. Separando variables, obtenemos

$$\int \frac{dz}{z+z^3} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z) - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \ln(x) + C,$$

donde C es una constante de integración. Para poder deshacer el cambio $z = y'$ es necesario despejar z en la expresión anterior. Para ello, tengamos en cuenta que

$$\ln(z) - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \ln\sqrt{z^2} - \ln\sqrt{z^2+1} = \ln\sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}}.$$

Por tanto,

$$\ln\sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}} = \ln(x) + C \Rightarrow \sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}} = e^C x \Rightarrow \frac{z^2}{z^2+1} = C_1 x^2,$$

donde $C_1 = e^{2C}$. Despejando z, resulta

$$z = \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - C_1^2 x^2}}.$$

Ahora podemos deshacer el cambio $z = y'$, mediante integración directa, para obtener la solución general de la ecuación diferencial original:

$$y' = z = \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - C_1^2 x^2}} \Rightarrow y = \int \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - C_1^2 x^2}}\, dx = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2.$$

Renombrando la constante C_1 (teniendo cuidado con los signos) podemos escribir finalmente la solución buscada:

$$y = \pm\sqrt{C_1 - x^2} + C_2. \qquad \square$$

Ejemplo 3.6. La curva que forma una cuerda inextensible que cuelga libremente entre dos puntos fijos se denomina *catenaria* (del latín *catena*, cadena). Dicha curva puede obtenerse como solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

que resulta al considerar las fuerzas que actúan sobre la cuerda (no entraremos en detalles).

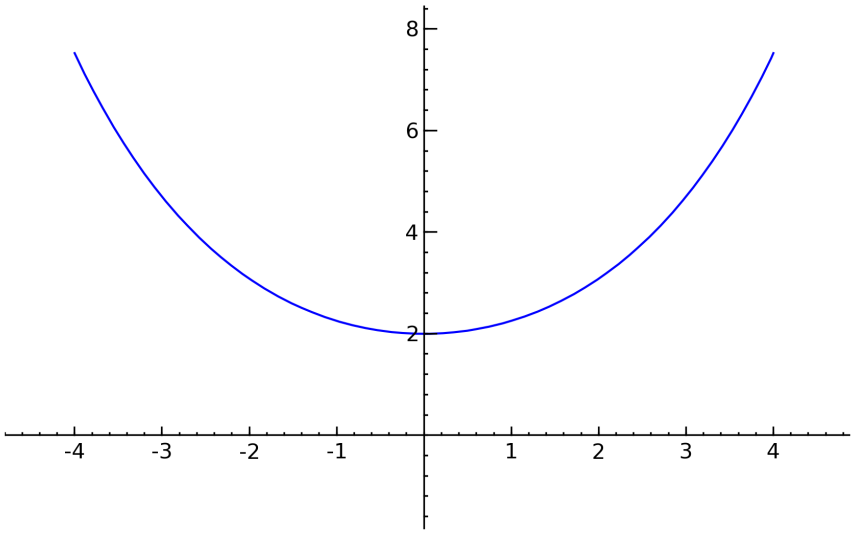


Figura 3.1: Catenaria.

En la ecuación diferencial no aparece explícitamente la variable x, por lo que podemos hacer el cambio $z = y'$. De esta forma, obtenemos la siguiente ecuación de primer orden:

$$z' = \frac{1}{a}\sqrt{1+z^2}.$$

Separando variables, resulta[1]

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{a} \Rightarrow \operatorname{arcsenh}(z) = \frac{x}{a} + C_1 \Rightarrow z = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right).$$

[1]Se definen la funciones *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

respectivamente. El arcoseno y el arcocoseno hiperbólicos son sus respectivas funciones inversas.

Deshaciendo el cambio $z = y'$, queda

$$y = \int \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) dx = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2.$$

Por último, imponiendo las condiciones iniciales obtenemos $C_1 = C_2 = 0$. Por tanto, la catenaria está definida por

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

En la figura 3.1 se representa la solución correspondiente al valor $a = 2$. □

3.2.2. Ecuaciones en las que no aparece la variable independiente

Una ecuación que no depende explícitamente de la variable independiente x adopta la forma

$$y'' = F(y, y').$$

En este caso el cambio es más complicado: pasaremos de las variables (x, y) a las variables (y, z), donde $z = y'$. Dicho de otra forma, la antigua variable dependiente y pasa a ser la nueva variable independiente, mientras que $z = y'$ es la nueva variable dependiente. Usando la regla de la cadena, podemos escribir

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Por tanto,

$$y'' = F(y, y') \Rightarrow z\frac{dz}{dy} = F(y, z).$$

Hemos obtenido así una ecuación de primer orden en las variables (y, z).

Ejemplo 3.7. Consideremos la ecuación

$$yy'' + (y')^2 = 0,$$

en la que no aparece de forma explícita la variable independiente x. Mediante el cambio explicado anteriormente, la ecuación queda así:

$$yz\frac{dz}{dy} + z^2 = 0 \Rightarrow y\frac{dz}{dy} = -z.$$

Separando variables, resulta

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow z = \frac{C_1}{y}.$$

Deshaciendo el cambio $z = y'$, obtenemos una nueva ecuación diferencial de primer orden y variables separadas:

$$\frac{dy}{dx} = y' = z = \frac{C_1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = C_1 \int dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2.$$

Renombrando las constantes, obtenemos la solución general de la ecuación de segundo orden en forma implícita:

$$y^2 = C_1 x + C_2. \qquad \square$$

3.3. Ecuaciones lineales de segundo orden

Salvo en algunos casos particulares, como los estudiados en los apartados anteriores, el análisis de un ecuación diferencial general requiere el uso de herramientas matemáticas avanzadas que están más allá del alcance de este trabajo. Nos centraremos por ello en un tipo particular de ecuaciones de segundo orden, las de tipo *lineal*, que aparecen con relativa frecuencia en las aplicaciones.

Una ecuación diferencial de segundo orden es *lineal* si puede escribirse de la siguiente forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones conocidas de la variable x.

Dentro de las ecuaciones lineales de segundo orden, distinguimos varios tipos:

- Si $r(x) \equiv 0$, la ecuación se denomina *homogénea*: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
- Si $r(x) \not\equiv 0$, se dice que la ecuación es *completa*.
- Si los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son constantes, la ecuación es *de coeficientes constantes*: $y'' + py' + qy = r(x)$, donde $p, q \in \mathbb{R}$. Obsérvese que el término independiente $r(x)$ no tiene por qué ser constante.

La solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden depende de dos constantes arbitrarias:

$$y \equiv y(x, C_1, C_2).$$

De modo análogo a las ecuaciones lineales de primer orden, dicha solución general tiene la siguiente estructura:

$$y(x, C_1, C_2) = y_H(x, C_1, C_2) + y_P(x),$$

donde $y_H(x, C_1, C_2)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación completa.

Vamos a analizar a continuación la estructura de las soluciones de una ecuación lineal homogénea. Supongamos que y_1 e y_2 son dos soluciones distintas de la ecuación, esto es,

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Es inmediato comprobar que, si C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, la función $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es también solución de la ecuación homogénea. En efecto, teniendo en cuenta que $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ e $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$, resulta:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1y_1'' + C_2y'') + p(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Surge de inmediato una pregunta natural: ¿es $y = C_1y_1 + C_2y_2$ la solución general de la ecuación homogénea? En el siguiente ejemplo veremos que, en general, la respuesta es negativa.

Ejemplo 3.8. Es inmediato comprobar que las funciones $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $y_2(x) = 2\operatorname{sen}(x)$ son soluciones de la ecuación $y'' = -y$. Sin embargo, la expresión

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\operatorname{sen}(x) + 2C_2\operatorname{sen}(x) = (C_1 + 2C_2)\operatorname{sen}(x) \equiv C\operatorname{sen}(x),$$

no puede ser la solución general de la ecuación diferencial. Para verlo, basta con notar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

no puede resolverse usando sólo la función $y = C\operatorname{sen}(x)$. En efecto, como

$$y(0) = C\operatorname{sen} 0 = 0,$$

la primera condición inicial nunca puede verificarse. □

Veamos entonces qué relación deben verificar las funciones $\{y_1, y_2\}$, soluciones particulares de la ecuación homogénea, para que la combinación lineal $y = C_1y_1 + C_2y_2$ sea la solución general de la ecuación homogénea. Dado un problema de valores iniciales arbitrario,

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

busquemos su solución en la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, C_1 y C_2:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_1y_2(x_0) = y_0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_1y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Para que el problema de valores iniciales tenga solución única, las constantes C_1y C_2 deben poder determinarse de manera única, es decir, el sistema lineal anterior debe ser compatible determinado. Esto equivale a decir que el determinante de la matriz de coeficientes no es nulo:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

En resumen, el problema de valores iniciales tendrá solución única de la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2$ si y sólo si se verifica la condición anterior. Como los datos x_0, y_0 e y_0' eran arbitrarios, podemos afirmar que $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general de la ecuación homogénea si y sólo si

$$W(y_1, y_2)(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

El determinante $W(y_1, y_2)$ se denomina *wronskiano* de $\{y_1, y_2\}$. Si se verifica la condición anterior sobre la no anulación del wronskiano, diremos que las soluciones $\{y_1, y_2\}$ constituyen un *sistema fundamental* de soluciones de la ecuación homogénea. En caso de que $\{y_1, y_2\}$ sea un sistema fundamental, se verifica que la solución general de la ecuación homogénea viene dada por $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

Ejemplo 3.9. Volviendo al ejemplo anterior, las funciones $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $y_2(x) = 2\operatorname{sen}(x)$ no constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $y'' = -y$, ya que

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & 2\operatorname{sen}(x) \\ \cos(x) & 2\cos(x) \end{vmatrix} = \cancel{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} - \cancel{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, según vimos, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ no puede ser la solución general de $y'' = -y$.

En cambio, las funciones $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $y_2(x) = \cos(x)$ sí que constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'' = -y$, ya que cada una de ellas es solución y

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix} = -(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)) = -1 \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación $y'' = -y$ es

$$y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x). \qquad \square$$

Resumiendo, hemos demostrado que la estructura de la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde y_1 e y_2 son soluciones particulares de la ecuación homogénea coque verifican la siguiente propiedad:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, para determinar la solución general de una ecuación lineal completa es necesario calcular:

- dos soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada, que sean linealmente independientes : $y_1(x)$, $y_2(x)$;
- una solución particular de la ecuación completa: $y_P(x)$.

La solución general de la ecuación completa será entonces

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La verdadera dificultad a la hora de aplicar los pasos anteriores está en la determinación de las soluciones particulares, que sólo podrá realizarse en determinados casos. Uno de los más importantes es el de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, que tienen la forma

$$y'' + py' + qy = r(x),$$

donde p y q son constantes reales y $r(x)$ es una función arbitraria. En la sección 3.4 veremos cómo construir la solución general de la ecuación homogénea asociada. Para determinar una solución particular, estudiaremos dos métodos:

- *el método de variación de las constantes* (sección 3.5), que puede aplicarse para cualquier función $r(x)$, aunque los cálculos a realizar pueden ser complicados;
- *el método de coeficientes indeterminados* (sección 3.6), que proporciona una solución particular de forma casi automática, pero sólo puede aplicarse cuando el término independiente $r(x)$ adopta una forma particular.

3.4. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

En esta sección vamos a analizar la forma de la solución general de una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$.

Se define el *polinomio característico* de la ecuación como

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

y la *ecuación característica* asociada como $P(\lambda) = 0$, esto es:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Al ser el polinomio característico de segundo grado, hay tres posibilidades en lo que respecta a la naturaleza de sus raíces. Concretamente, $P(\lambda)$ puede tener:

I. Dos raíces reales distintas: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

II. Una raíz real doble: $\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2$.

III. Raíces complejas conjugadas: $\lambda = a \pm bi$, donde i es la unidad imaginaria y $b \neq 0$.

En cada caso, la solución general de la ecuación homogénea puede calcularse de forma directa. Analicemos a continuación cada uno de los casos.

I. Raíces reales distintas: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Un sistema fundamental de soluciones viene dado por las funciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

En efecto, para $i = 1, 2$ se verifica

$$y_i'' + py_i' + qy_i = \lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + p\lambda_i e^{\lambda_i x} + qe^{\lambda_i x} = (\lambda_i^2 + p\lambda_i + q)e^{\lambda_i x} = P(\lambda_i)e^{\lambda_i x} = 0,$$

ya que $P(\lambda_i) = 0$ por ser λ_i raíz del polinomio característico; esto prueba que cada y_i es solución de la ecuación homogénea. Además, teniendo en cuenta que $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Ejemplo 3.10. Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Calculemos sus raíces:

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$$

Al ser las raíces reales y distintas, la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Sage nos da el siguiente resultado:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) - 5*diff(y, x) + 6*y == 0
sage: desolve(ec, y)
k1*e^(3*x) + k2*e^(2*x)
```

□

II. Raíz real doble: λ. Las funciones

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda x}$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones. Es inmediato comprobar que ambas funciones son soluciones de la ecuación; además,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (1 + \lambda x)e^{2\lambda x} - \lambda x e^{\lambda x} = e^{2\lambda x} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda x}.$$

Ejemplo 3.11. Resolvamos la ecuación

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, que tiene una raíz real doble: $\lambda = 1$. Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^x.$$

He aquí el código Sage correspondiente:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) - 2*diff(y, x) + y == 0
sage: desolve(ec, y)
(k2*x + k1)*e^x
```

□

III. Raíces complejas conjugadas: $a \pm bi$, $b \neq 0$. En este caso, un sistema fundamental de soluciones lo constituyen las funciones

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \quad y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(bx).$$

Es inmediato verificar que ambas funciones son soluciones de la ecuación. Como además

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos(bx) & e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \\ e^{ax}(a\cos(bx) - b\operatorname{sen}(bx)) & e^{ax}(a\operatorname{sen}(bx) + b\cos(bx)) \end{vmatrix}$$
$$= be^{2ax}(\operatorname{sen}^2(bx) + \cos^2(bx)) = be^{2ax} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

deducimos que la solución general de la ecuación viene dada por

$$y = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\operatorname{sen}(bx)).$$

Ejemplo 3.12. Consideremos la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, cuyas raíces son $-1 \pm 2i$. Por tanto, la solución general de la ecuación será

$$y = e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x)).$$

El código Sage para resolver la ecuación es:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) + 2*diff(y, x) + 5*y == 0
sage: desolve(ec, y)
(k1*sin(2*x) + k2*cos(2*x))*e^(-x)
```

□

Hemos visto que es posible determinar, en cualquier caso, la solución general de la ecuación lineal homogénea en el caso de coeficientes constantes. En las dos siguientes secciones estudiaremos métodos para calcular una solución particular de la ecuación completa.

3.5. Método de variación de las constantes

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes constantes dada por

$$y'' + py' + qy = r(x),$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$ y $r(x)$ es una función conocida, cuya solución general tiene la siguiente estructura:

$$y \equiv y(x, C_1, C_2) = y_H(x, C_1, C_2) + y_P(x).$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada, $y_H(x, C_1, C_2)$, puede determinarse en función de las raíces del polinomio característico asociado, como vimos en la sección anterior. A continuación vamos a ver cómo construir una solución particular, $y_P(x)$, usando para ello el *método de variación de las constantes*.

Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada es de la forma

$$y_H(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde $\{y_1, y_2\}$ es un sistema fundamental de soluciones y C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. La idea del método de variación de las constantes consiste en construir una solución particular de la ecuación completa que tenga la forma

$$y_P(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

siendo $C_1(x)$ y $C_2(x)$ funciones a determinar. Nótese que la misma idea se aplicó cuando estudiamos las ecuaciones lineales de primer orden.

Las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ se calculan sustituyendo y_P en la ecuación completa. Comencemos calculando la primera derivada de y_P:

$$y_P'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x).$$

En este punto, haremos la siguiente suposición:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0,$$

que será fundamental en los cálculos posteriores. Podemos escribir entonces

$$y_P'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$y_P''(x) = C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x) + C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x).$$

Sustituyendo ahora y_P en la ecuación y agrupando convenientemente los términos, resulta:

$$\begin{aligned} C_1(x)(y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)) + C_2(x)(y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)) \\ + C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = r(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x).$$

Resumiendo, hemos llegado al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x), \end{cases}$$

cuyas incógnitas son $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$. Este sistema es compatible determinado, ya que el determinante de la matriz de coeficientes coincide con el wronskiano $W(y_1, y_2)$, que no se anula en ningún punto $x \in \mathbb{R}$ por ser $\{y_1, y_2\}$ un sistema fundamental de soluciones. En consecuencia, el sistema admite una única solución que puede calcularse mediante la regla de Cramer:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ r(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Por último, integramos las expresiones obtenidas en el paso anterior:

$$C_1(x) = \int \frac{-y_2(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}dx, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}dx.$$

Una vez calculadas $C_1(x)$ y $C_2(x)$, podemos construir la solución particular y_P.

Observación. La posibilidad de aplicar el método de variación de las constantes dependerá de la dificultad que tenga el cálculo de las integrales anteriores. □

Ejemplo 3.13. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = e^x.$$

En primer lugar, notemos que la ecuación característica es $\lambda^2 - 4 = 0$, que tiene a $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ como raíces. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada, $y'' - 4y = 0$, será

$$y_H(x, C_1, C_2) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x},$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

A continuación, y siguiendo el método de variación de las constantes, construimos una solución particular de la ecuación completa de la forma

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

donde $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$. Las funciones $\{y_1, y_2\}$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, cuyo wronskiano es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4.$$

Las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ se determinan calculando las siguientes integrales:

$$C_1(x) = \int \frac{-y_2(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}dx = \int \frac{-e^{-2x}e^x}{-4}dx = \tfrac{1}{4}\int e^{-x}dx = -\tfrac{1}{4}e^{-x},$$
$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}dx = \int \frac{e^{2x}e^x}{-4}dx = -\tfrac{1}{4}\int e^{3x}dx = -\tfrac{1}{12}e^{3x}.$$

La solución particular buscada es, por tanto,

$$y_P(x) = -\tfrac{1}{4}e^{-x}e^{2x} - \tfrac{1}{12}e^{3x}e^{-2x} = -\tfrac{1}{3}e^x.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación completa será

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \tfrac{1}{3}e^x.$$

Veamos como resolver el ejemplo con Sage:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) - 4*y == exp(x)
sage: desolve(ec, y)
k1*e^(2*x) + k2*e^(-2*x) - 1/3*e^x
```

□

Ejemplo 3.14. Resolvamos la ecuación

$$y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = \pm i$. De este modo, la solución de la ecuación homogénea asociada será

$$y_H(x, C_1, C_2) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x),$$

donde C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. El wronskiano del sistema fundamental formado por $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $y_2(x) = \cos(x)$ es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix} = -(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)) = -1.$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación completa de la forma

$$y_P(x) = C_1(x)\,\mathrm{sen}(x) + C_2(x)\cos(x),$$

donde

$$C_1(x) = \int \frac{-y_2(x)r(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx = \ln(\mathrm{sen}(x)),$$
$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int (-1)dx = -x.$$

En consecuencia,

$$y_P(x) = \ln(\mathrm{sen}(x))\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x).$$

Por último, la solución general de la ecuación completa viene dada por

$$y(x) = C_1\,\mathrm{sen}(x) + C_2\cos(x) + \ln(\mathrm{sen}(x))\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x).$$

¿Será capaz Sage de obtener la solución de la ecuación en este caso? Claro que sí:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) + y == 1/sin(x)
sage: desolve(ec, y)
k1*sin(x) + k2*cos(x) - x*cos(x) + log(sin(x))*sin(x)
```

□

Ejemplo 3.15. Consideremos la ecuación

$$y'' + y = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x).$$

La ecuación homogénea asociada es la misma que en el ejemplo anterior:

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{sen}(x) + C_2\cos(x),$$

al igual que el wronskiano: $W(y_1,y_2)(x) = -1$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\sec(x) = 1/\cos(x)$, resulta que

$$C_1(x) = \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(\cos(x)),$$
$$C_2(x) = -\int \mathrm{tg}^2(x)dx = \int (1-(1+\mathrm{tg}^2(x))dx = x - \mathrm{tg}(x).$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación completa será

$$y_P(x) = -\ln(\cos(x))\,\mathrm{sen}(x) + (x - \mathrm{tg}(x))\cos(x).$$

Finalmente, la solución general de la ecuación $y'' + y = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$ es

$$y(x) = C_1\,\mathrm{sen}(x) + C_2\cos(x) - \ln(\cos(x))\,\mathrm{sen}(x) + (x - \mathrm{tg}(x))\cos(x).$$ □

3.6. Método de coeficientes indeterminados

Consideremos la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

El método de coeficientes indeterminados se aplica cuando el término independiente $r(x)$ adopta una de las siguientes formas:

I. $r(x) = Ae^{ax}$, $a, A \in \mathbb{R}$;

II. $r(x) = A\cos(bx)$ o $r(x) = A\,\mathrm{sen}(bx)$, $b, A \in \mathbb{R}$;

III. $r(x) = Ae^{ax}\cos(bx)$ o $r(x) = Ae^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)$, $a, b, A \in \mathbb{R}$;

IV. $r(x)$ es un polinomio;

V. $r(x)$ es una suma formada por términos que están en alguno de los casos anteriores.

El método de coeficientes indeterminados también puede aplicarse con términos independientes más complicados, como pueden ser productos de polinomios, exponenciales y senos o cosenos. Por simplicidad, no trataremos aquí estos casos.

A continuación analizaremos cómo construir una solución particular de la ecuación según el caso en que nos encontremos. Denotaremos por $P(\lambda)$ al polinomio característico asociado a la ecuación:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

I. $\underline{r(x) = Ae^{ax}}$. En tal caso se busca una solución particular de la forma

$$y_P(x) = Mx^m e^{ax}.$$

La constante M se determina sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (de ahí el nombre de *coeficientes indeterminados*). El exponente m es la multiplicidad[2] de a como raíz de $P(\lambda)$, esto es, el número de veces que a es raíz de $P(\lambda)$. Observemos que los posibles valores de m son 0 (si a no es raíz de $P(\lambda)$), 1 (si a es raíz simple) y 2 (si a es raíz doble).

[2] Es conveniente recordar que una raíz $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de un polinomio $P(\lambda)$ tiene multiplicidad $m \geqslant 1$ si $P(\lambda)$ puede factorizarse como $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$, con $Q(\lambda_0) \neq 0$. Si $m = 1$, diremos que la raíz es simple. Si λ_0 no es raíz de $P(\lambda)$, diremos que su multiplicidad es 0. Por otra parte, si $a + bi$ es raíz de un polinomio $P(\lambda)$ con coeficientes reales, también lo es su conjugada $a - bi$; de esta forma, el número de raíces complejas siempre es par.

Ejemplo 3.16. Resolvamos la ecuación

$$y'' - y = e^{4x}.$$

Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ son $\lambda = \pm 1$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea será

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

En este caso $a = 4$ no es raíz de $P(\lambda)$, por lo que $m = 0$. Busquemos entonces una solución particular de la forma

$$y_P(x) = Me^{4x}.$$

Como $y_P''(x) = 16Me^{4x}$, sustituyendo en la ecuación resulta

$$y_P''(x) - y_P(x) = e^{4x} \Rightarrow 16Me^{4x} - Me^{4x} = e^{4x} \Rightarrow 15M = 1 \Rightarrow M = \tfrac{1}{15}.$$

La solución particular buscada es pues

$$y_P(x) = \frac{e^{4x}}{15}.$$

Por último, la solución general será

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^{4x}}{15}. \qquad \square$$

Ejemplo 3.17. Resolvamos la ecuación

$$y'' - y = e^x.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, las raíces del polinomio característico son $\lambda = \pm 1$, por lo que $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Ahora $a = 1$ es raíz simple del polinomio característico ($m = 1$), por lo que la solución particular habrá que buscarla en la forma

$$y_P(x) = Mxe^{4x}.$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$y_P'' - y_P = e^x \Rightarrow M(2 + x)e^x - Mxe^x = e^x \Rightarrow 2M = 1 \Rightarrow M = \tfrac{1}{2},$$

de donde

$$y_P(x) = \frac{x}{2} e^x.$$

La solución general de la ecuación es pues

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x. \qquad \square$$

Ejemplo 3.18. Consideremos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}.$$

Su ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, que tiene una raíz real doble: $\lambda = -1$. La solución general de la ecuación homogénea es pues $y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

Por ser $\lambda = -1$ raíz doble, tenemos que $m = 2$. Esto significa que debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_P(x) = Mx^2 e^{-x}.$$

En este caso, $y_P'(x) = M(2x - x^2)e^{-x}$ e $y_P''(x) = M(2 - 4x + x^2)e^{-x}$; al sustituir en la ecuación, simplemente queda

$$2Me^{-x} = e^{-x} \Rightarrow 2M = 1 \Rightarrow M = \tfrac{1}{2}.$$

En conclusión,

$$y_P(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Por último, la solución general de $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ será

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}. \qquad \square$$

II. $r(x) = A\cos(bx)$ o $r(x) = A\,\mathrm{sen}(bx)$. En ambos casos se puede determinar una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x^m(M_1\cos(bx) + M_2\,\mathrm{sen}(bx)),$$

siendo m la multiplicidad de bi como raíz de $P(\lambda)$. Al ser bi un número complejo, su multiplicidad sólo puede ser $m = 0$ (si no es raíz) o $m = 1$ (si es raíz; la otra raíz es necesariamente $-bi$). Las constantes M_1 y M_2 se calculan sustituyendo y_P en la ecuacion diferencial.

Ejemplo 3.19. Resolvamos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = \cos(2x).$$

La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene a $\lambda = -1$ como raíz doble. La solución de la ecuación homogénea asociada es entonces $y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

Por otra parte, como $bi = 2i$ no es raíz del polinomio característico ($m = 0$), debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_P(x) = M_1\cos(2x) + M_2\,\mathrm{sen}(2x).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$(4M_2 - 3M_1)\cos(2x) - (4M_1 + 3M_2)\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x).$$

Ahora igualamos los coeficientes que acompañan a $\cos(2x)$ y $\operatorname{sen}(2x)$:

$$\left.\begin{array}{l} 4M_2 - 3M_1 = 1 \\ 4M_1 + 3M_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = -\tfrac{3}{25},\ M_2 = \tfrac{4}{25}.$$

De esta forma, la solución particular buscada es

$$y_P(x) = -\tfrac{3}{25}\cos(2x) + \tfrac{4}{25}\operatorname{sen}(2x).$$

Por último, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} - \tfrac{3}{25}\cos(2x) + \tfrac{4}{25}\operatorname{sen}(2x). \qquad \square$$

Ejemplo 3.20. Consideremos la ecuación

$$y'' + y = \cos(x).$$

La solución de la ecuación homogénea es $y_H(x) = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x)$, ya que las raíces del polinomio característico son $\lambda = \pm i$.

En este caso $bi = i$ sí es raíz del polinomio característico, por lo que $m = 1$. Debemos pues determinar una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x(M_1\cos(x) + M_2\operatorname{sen}(x)).$$

Derivando y_P y sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos

$$2M_2\cos(x) - 2M_1\operatorname{sen}(x) = \cos(x).$$

Igualando coeficientes, resulta

$$2M_2 = 1 \Rightarrow M_2 = \tfrac{1}{2},$$

de donde $M_1 = 0$. Por tanto,

$$y_P(x) = \frac{x}{2}\operatorname{sen}(x).$$

La solución general de la ecuación $y'' + y = \cos(x)$ es pues

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(x). \qquad \square$$

Observación. La misma técnica puede aplicarse cuando el término $r(x)$ es una combinación lineal de $\cos(bx)$ y $\operatorname{sen}(bx)$. En cambio, no es aplicable para combinaciones lineales de $\cos(bx)$ y $\operatorname{sen}(dx)$, con $b \neq d$. $\square$

Ejemplo 3.21. Para el término independiente $r(x) = \cos(3x) + 5\,\mathrm{sen}(3x)$ podemos buscar una solución particular de la forma propuesta en el caso II. Sin embargo, este tipo de solución no sería válido para un término independiente como $r(x) = \cos(3x) + 5\,\mathrm{sen}(2x)$, que estaría dentro del caso V. □

III. $r(x) = Ae^{ax}\cos(bx)$ o $r(x) = Ae^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)$. En los dos casos se considera una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x^m e^{ax}(M_1\cos(bx) + M_2\,\mathrm{sen}(bx)).$$

El exponente m es la multiplicidad de $a + bi$ como raíz del polinomio característico (admite los valores $m = 0$ si no es raíz, y $m = 1$ si lo es), y las constantes M_1 y M_2 se determinan sustituyendo y_P en la ecuación.

Ejemplo 3.22. Consideremos la ecuación

$$y'' + y' + y = e^{2x}\cos(7x).$$

Como las raíces del polinomio característico son $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_H(x) = e^{-x/2}\left(C_1\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Como $a + bi = 2 + 7i$ no es raíz del polinomio característico, debemos buscar la solución particular de la siguiente forma ($m = 0$):

$$y_P(x) = e^{2x}(M_1\cos(7x) + M_2\,\mathrm{sen}(7x)).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación completa, obtenemos

$$(-42M_1 + 35M_2)e^{2x}\cos(7x) + (-35M_1 - 42M_2)e^{2x}\,\mathrm{sen}(7x) = e^{2x}\cos(7x).$$

Igualando coeficientes, resulta

$$\left.\begin{array}{l} -42M_1 + 35M_2 = 1 \\ -35M_1 - 42M_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = -\tfrac{42}{35^2+42^2}, \quad M_2 = \tfrac{35}{35^2+42^2}.$$

Hemos determinado así la siguiente solución particular:

$$y_P(x) = e^{2x}\frac{35\,\mathrm{sen}(7x) - 42\cos(7x)}{35^2 + 42^2}.$$

Por último, la solución general de la ecuación será

$$y(x) = e^{-x/2}\left(C_1\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + e^{2x}\frac{35\,\mathrm{sen}(7x) - 42\cos(7x)}{35^2 + 42^2}.$$ □

Observación. Los casos I a III podrían englobarse en un único caso:

$$r(x) = e^{ax}(A\cos(bx) + B\,\mathrm{sen}(bx)), \quad a, b, A, B \in \mathbb{R}.$$

La solución particular y_P habría que buscarla en la forma

$$y_P(x) = x^m e^{ax}(M_1\cos(bx) + M_2\,\mathrm{sen}(bx)),$$

donde M_1 y M_2 son constantes a determinar y m es la multiplicidad de $a + bi$ como raíz del polinomio característico. □

IV. $r(x)$ es un polinomio de grado d. Se busca una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x^m Q_d(x),$$

donde $Q_d(x)$ es un polinomio de grado d, que se determina sustituyendo y_P en la ecuación, y m es la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio característico (las posibilidades son $m = 0, 1, 2$)

Ejemplo 3.23. Resolvamos la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12.$$

Las raíces del polinomio caraterístico son $\lambda = 1 \pm 2i$, así que la solución de la ecuación homogénea será $y_H(x) = e^x(C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x))$.

Teniendo en cuenta que el término independiente es un polinomio de grado $d = 2$ y que 0 no es raíz del polinomio característico ($m = 0$), buscaremos una solución particular de la forma

$$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

esto es, un polinomio de segundo grado cuyos coeficientes debemos determinar por sustitución. Calculamos $y_P'(x) = 2Ax + B$, $y_P''(x) = 2A$ y sustituimos en la ecuación completa:

$$5Ax^2 + (-4A + 5B)x + 2A - 2B + 5C = 25x^2 + 12.$$

Igualamos los coeficientes de los términos del mismo orden:

$$\left.\begin{aligned} 5A &= 25 \\ -4A + 5B &= 0 \\ 2A - 2B + 5C &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 5,\ B = 4,\ C = 2.$$

Por tanto,

$$y_P(x) = 5x^2 + 4x + 2.$$

La solución general de la ecuación $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$ es, por tanto,

$$y(x) = e^x(C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x)) + 5x^2 + 4x + 2.$$ □

Ejemplo 3.24. Resolvamos la ecuación

$$y'' - 2y' = 6x^2 + 7x + 5.$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. La solución de la ecuación homogénea será entonces

$$y_H(x) = C_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

El término independiente es un polinomio de grado $d = 2$. Como en este caso $\lambda_1 = 0$ es raíz del polinomio característico ($m = 1$), debemos considerar

$$y_P(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, resulta

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = 6x^2 + 7x + 5.$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} -6A = 6 \\ 6A - 4B = 7 \\ 2B - 2C = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1,\ B = -\tfrac{13}{4},\ C = -\tfrac{23}{4},$$

de donde

$$y_P(x) = -\frac{x}{4}(4x^2 + 13x + 23).$$

Para terminar, escribimos la solución general de la ecuación:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x}{4}(4x^2 + 13x + 23). \qquad \square$$

Observación. En el caso en que el valor 0 sea raíz doble del polinomio característico ($m = 2$), la ecuación a resolver adopta la forma $y'' = r(x)$, que puede resolverse mediante integración directa. $\square$

V. $r(x)$ es una suma de términos que están en los casos anteriores. Supongamos que $r(x)$ es de la forma

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \cdots + r_s(x),$$

donde cada $r_i(x)$, $i = 1, \ldots s$, está en uno de los casos I-IV. Podemos calcular entonces una solución particular $y_i(x)$ para cada una de las ecuaciones

$$y'' + py' + qy = r_i(x), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Pues bien, una solución particular de la ecuación

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

es la suma de las soluciones particulares anteriormente obtenidas:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_s(x).$$

Ejemplo 3.25. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x + \cos(3x) - 6x.$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, por lo que $y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

El término independiente $r(x) = 2e^x + \cos(3x) - 6x$ no está en ninguno de los casos anteriores, pero podemos escribir

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + r_3(x),$$

donde

$$r_1(x) = 2e^x, \quad r_2(x) = \cos(3x), \quad r_3(x) = -6x.$$

Notemos que $r_1(x)$ está en el caso I, $r_2(x)$ en el caso II y $r_3(x)$ en el caso IV. Podemos aplicar entonces el método de coeficientes indeterminados considerando cada uno de estos sumandos por separado.

Para $r_1(x) = 2e^x$ debemos considerar una solución particular de la forma

$$y_1(x) = Mxe^x,$$

ya que $a = 1$ es raíz del polinomio característico. Sustituyendo en la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, obtenemos: $-Me^x = 2e^x \Rightarrow M = -2$. Así pues,

$$y_1(x) = -2xe^x.$$

La solución particular correspondiente a $r_2(x) = \cos(3x)$ es de la forma

$$y_2(x) = M_1\cos(3x) + M_2\,\mathrm{sen}(3x),$$

ya que $bi = 3i$ no es raíz del polinomio característico. Sustituyendo en la ecuación $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x)$, resulta

$$(-7M_1 - 9M_2)\cos(3x) + (9M_1 - 7M_2)\,\mathrm{sen}(3x) = \cos(3x) \Rightarrow M_1 = -\tfrac{7}{130},\ M_2 = -\tfrac{9}{130}.$$

Por tanto,

$$y_2(x) = -\tfrac{1}{130}(7\cos(3x) + 9\,\mathrm{sen}(3x)).$$

Por último, la solución particular correspondiente a $r_3(x) = -6x$ es de la forma

$$y_3(x) = Ax + B,$$

ya que 0 no es raíz del polinomio característico. Sustituyendo en la ecuación $y'' - 3y' + 2y = -6x$, obtenemos: $2Ax + 2B - 3A = -6x$, de donde $A = -3$ y $B = -\frac{9}{2}$. Por tanto,

$$y_3(x) = -3x - \tfrac{9}{2}.$$

La solución general de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2e^x + \cos(3x) - 6x$ se construye sumando a la solución general de la homogénea y_H las tres soluciones particulares obtenidas:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^x - \tfrac{1}{130}(7\cos(3x) + 9\,\mathrm{sen}(3x)) - 3x - \tfrac{9}{2}. \qquad \square$$

3.7. Problemas de valores iniciales y de contorno

Un *problema de valores iniciales* o *de Cauchy* para una ecuación lineal de segundo orden adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \\ y'(a) = y_1, \end{cases}$$

siendo y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ datos del problema. En un problema de valores iniciales se especifica cuánto han de valer la solución y su primera derivada en el extremo inferior del intervalo donde se va a resolver el problema. En general, dicho problema poseerá solución única, que se determina imponiendo las condiciones iniciales sobre la solución general de la ecuación.

Ejemplo 3.26. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación diferencial es de coeficientes constantes y homogénea. Su ecuación característica es $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, que tiene una raíz doble $\lambda = 3$; en consecuencia, la solución general está dada por:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, podemos determinar las constantes C_1 y C_2:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{3\cdot 0} = 1 \Rightarrow C_1 = 1, \\ y'(0) = 0 \Rightarrow (3C_1 + C_2 + 3C_2 \cdot 0)e^{3\cdot 0} = 0 \Rightarrow 3\cancel{C_1}^{1} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -3. \end{cases}$$

Por tanto, la única solución del problema de valores iniciales es

$$y = (1 - 3x)e^{3x}.$$

Usemos Sage para resolver el problema y dibujar la solución en el intervalo $[0, 1]$:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) - 6*diff(y, x) + 9*y == 0
sage: sol = desolve(ec, y, ics=[0, 1, 0]) # ics=[a, y0, y1]
sage: sol
-(3*x - 1)*e^(3*x)
sage: plot(sol, 0, 1)
```

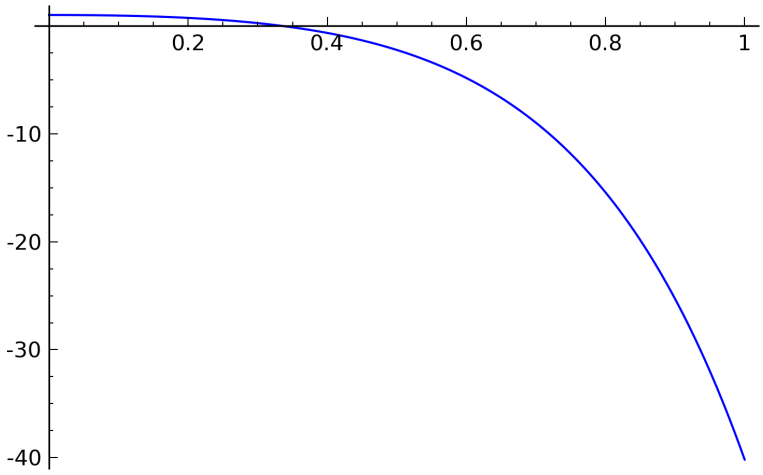


Figura 3.2: Solución del ejemplo 3.26 en el intervalo $[0, 1]$.

El resultado obtenido puede verse en la figura 3.2. □

Un *problema de contorno* o *de valores en la frontera* para una ecuación lineal de segundo orden tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

siendo α, $\beta \in \mathbb{R}$ datos del problema. Las condiciones $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$ se denominan *condiciones de contorno*. Notemos que en un problema de contorno se definen los valores que ha de tomar la solución de la ecuación diferencial en ambos extremos del intervalo donde se quiere resolver.

Ejemplo 3.27. Resolvamos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{4}y = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ y(0) = 1, \\ y(\pi) = -1. \end{cases}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial es $\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$, que tiene raíces $\lambda = \pm\frac{1}{2}i$; la solución general tiene entonces la siguiente expresión:

$$y = C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 imponemos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow C_1 \cancelto{1}{\cos 0} + C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen} 0} = 1 \Rightarrow C_1 = 1, \\ y(\pi) = -1 \Rightarrow C_1 \cancelto{0}{\cos \frac{\pi}{2}} + C_2 \cancelto{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = -1 \Rightarrow C_2 = -1. \end{cases}$$

Por tanto, la solución del problema de contorno es

$$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

El resultado puede obtenerse con el siguiente código Sage:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) + (1/4)*y == 0
sage: desolve(ec, y, ics=[0, 1, pi, -1]) # ics=[a, alfa, b, beta]
-sin(1/2*x) + cos(1/2*x)
```

□

Observación. En el ejemplo anterior, el problema de contorno tenía una única solución. En el siguiente, veremos que también es posible que un problema de contorno tenga infinitas soluciones o ninguna en absoluto. □

Ejemplo 3.28. Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ y(0) = \alpha, \\ y(\pi) = \beta, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Su solución general viene dada por

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x).$$

Al imponer las condiciones de contorno, resulta:

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \Rightarrow C_1 = \alpha, \\ y(\pi) = \beta \Rightarrow C_1 = -\beta. \end{cases}$$

Entonces, si $\alpha + \beta \neq 0$ el problema no tiene solución. En cambio, si suponemos $\alpha + \beta = 0$ existen infinitas soluciones al problema, ya que C_2 podría tomar cualquier valor. □

3.8. Ecuaciones lineales de orden superior

El estudio de las ecuaciones diferenciales de orden mayor que dos sigue pautas similares al análisis realizado para ecuaciones de segundo orden. Al igual que en este

caso, restringiremos nuestro estudio a las ecuaciones lineales, es decir, a ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),$$

donde $n \geqslant 3$ y $a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ y $r(x)$ son funciones arbitrarias. La solución general de una ecuación lineal es de la forma

$$y = y_H + y_P,$$

donde y_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

mientras que y_P es una solución particular de la ecuación completa. La solución general dependerá de n constantes arbitrarias. Para plantear un problema de valores iniciales, son necesarias n condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

La solución de un problema de valores iniciales es única: el valor de las constantes que aparecen en la solución general se determina de forma única a partir de las condiciones iniciales.

Diremos que un conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de soluciones de la ecuación homogénea es un *sistema fundamental* si su wronskiano no se anula en ningún punto:

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dado un sistema fundamental $\{y_1, \ldots, y_n\}$, la solución general de la ecuación lineal homogénea es de la forma

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

siendo $C_1, \ldots, C_n$ constantes reales arbitrarias.

Nos centraremos a partir de ahora en las ecuaciones lineales de coeficientes constantes, es decir,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = r(x),$$

siendo $a_{n-1}, \ldots, a_0$ constantes reales. El polinomio característico asociado es

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

A menos que $n \leqslant 4$, no se dispone de fórmulas explícitas para el cálculo de las raíces de $P(\lambda)$. En general, se puede intentar aplicar algún método algebraico para el cálculo de raíces como, por ejemplo, el método de Ruffini.

Para determinar la solución general de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

a cada raíz del polinomio característico le asociaremos una o varias soluciones particulares, atendiendo a la naturaleza de dicha raíz:

I. Si λ es una raíz real simple, entonces una solución es $e^{\lambda x}$.

II. Si λ es un raíz real de multiplicidad $m \geqslant 2$, podemos considerar m soluciones distintas:
$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x}, \ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

III. Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas simples, entonces $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ son las soluciones asociadas.

IV. Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas de multiplicidad $m \geqslant 2$, tenemos $2m$ soluciones:
$$\begin{aligned} &e^{ax}\cos(bx),\ xe^{ax}\cos(bx),\ x^2e^{ax}\cos(bx), \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos(bx),\\ &e^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ xe^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ x^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx), \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx). \end{aligned}$$

Puede probarse que las n soluciones particulares $\{y_1, \ldots, y_n\}$ así obtenidas forman un sistema fundamental de soluciones. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea será

$$y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x).$$

Ejemplo 3.29. Resolvamos la ecuación homogénea

$$y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

El polinomio característico asociado es $P(\lambda) = \lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^2$. Calculemos sus raíces:

$$\lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ (raíz real doble)}, \\ \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0. \end{cases}$$

Para resolver la ecuación $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$ hacemos el cambio $\mu = \lambda^2$:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \mu^2 + 8\mu + 16 = 0 \Rightarrow \mu = -4 \text{ (doble)}.$$

Por tanto, $\lambda = \pm\sqrt{\mu} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$, siendo estas raíces complejas dobles.

A la raíz doble $\lambda = 0$ le corresponden las soluciones $e^{0x} = 1$ y $xe^{0x} = x$, mientras que a las raíces dobles $\pm 2i$ les asociamos las soluciones $e^{0x}\cos(2x) = \cos(2x)$, $x\cos(2x)$, $\operatorname{sen}(2x)$ y $x\operatorname{sen}(2x)$. En consecuencia, la solución general de la ecuación será

$$8y(x) = C_1 + C_2 x + C_3\cos(2x) + C_4 x\cos(2x) + C_5\operatorname{sen}(2x) + C_6 x\operatorname{sen}(2x).$$

En este caso, Sage no es capaz de resolver de forma directa la ecuación:

```
sage: var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 6) + 8*diff(y, x, 4) + 16*diff(y, x, 2) == 0
sage: desolve(ec, y)
Traceback (most recent call last):
...
NotImplementedError: Maxima was unable to solve this ODE.
```

De hecho, el comando `desolve` sólo puede resolver ecuaciones de primer y segundo orden. Más adelante, cuando estudiemos sistemas de ecuaciones, veremos como solventar este problema. □

Ejemplo 3.30. Vamos a resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

El polinomio característico asociado a la ecuación es $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$. Sus raíces pueden obtenerse fácilmente usando el método de Ruffini: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Las soluciones asociadas a cada raíz son: e^x, e^{2x} y e^{3x}. Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Impongamos ahora las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{lcl} y(0)=1 & \Rightarrow & C_1+C_2+C_3=1 \\ y'(0)=0 & \Rightarrow & C_1+2C_2+3C_3=0 \\ y''(0)=0 & \Rightarrow & C_1+4C_2+9C_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=0,\ C_2=3,\ C_3=-2.$$

En consecuencia, la solución del problema de valores iniciales es

$$y(x)=3e^{2x}-2e^{3x}. \qquad \square$$

Consideremos ahora la ecuación lineal de coeficientes constantes no homogénea

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_2y''+a_1y'+a_0y=r(x),$$

cuya solución general se construye como suma de la solución general y_H de la ecuación homogénea asociada y de una solución particular y_P de la ecuación completa. Para determinar una solución particular aplicaremos el método de variación de las constantes.

Si $\{y_1,\ldots,y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, buscamos un conjunto de funciones $\{C_1(x),\ldots,C_n(x)\}$ que sea solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x)+y_2(x)C_2'(x)+\cdots+y_n(x)C_n'(x)=0, \\ y_1'(x)C_1'(x)+y_2'(x)C_2'(x)+\cdots+y_n'(x)C_n'(x)=0, \\ y_1''(x)C_1'(x)+y_2''(x)C_2'(x)+\cdots+y_n''(x)C_n'(x)=0, \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x)C_1'(x)+y_2^{(n-1)}(x)C_2'(x)+\cdots+y_n^{(n-1)}(x)C_n'(x)=r(x), \end{cases}$$

para cada $x\in\mathbb{R}$. Se trata de un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas (a saber, $C_1'(x),\ldots,C_n'(x)$) que es compatible determinado, ya que el determinante de la matriz de coeficientes coincide con el wronskiano del sistema fundamental, que no se anula en ningún punto. En consecuencia, podemos resolverlo (mediante la regla de Cramer, por ejemplo) para determinar $C_1'(x),\ldots,C_n'(x)$. A continuación se calculan $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ mediante integración, y por último se construye la solución particular:

$$y_P(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\cdots+C_n(x)y_n(x).$$

Ejemplo 3.31. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'''-6y''+11y'-6y=xe^{-x}.$$

El polinomio característico es $P(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$, cuyas raíces son 1, 2 y 3. De este modo, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}.$$

En particular, un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea está formado por las funciones $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = e^{3x}$.

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + y_3(x)C_3'(x) = 0, \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) + y_3'(x)C_3'(x) = 0, \\ y_1''(x)C_1'(x) + y_2''(x)C_2'(x) + y_3''(x)C_3'(x) = r(x), \end{cases}$$

que queda como

$$\begin{cases} e^xC_1'(x) + e^{2x}C_2'(x) + e^{3x}C_3'(x) = 0, \\ e^xC_1'(x) + 2e^{2x}C_2'(x) + 3e^{3x}C_3'(x) = 0, \\ e^xC_1'(x) + 4e^{2x}C_2'(x) + 9e^{3x}C_3'(x) = xe^{-x}. \end{cases}$$

Podemos simplificar las ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1'(x) + e^xC_2'(x) + e^{2x}C_3'(x) = 0, \\ C_1'(x) + 2e^xC_2'(x) + 3e^{2x}C_3'(x) = 0, \\ C_1'(x) + 4e^xC_2'(x) + 9e^{2x}C_3'(x) = xe^{-2x}. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 1 & 2e^x & 3e^{2x} \\ 1 & 4e^x & 9e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}.$$

Aplicando la regla de Cramer, obtenemos

$$C_1'(x) = \frac{1}{2e^{3x}} \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 3e^{2x} \\ xe^{-2x} & 4e^x & 9e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^{-2x},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{2e^{3x}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 1 & 0 & 3e^{2x} \\ 1 & xe^{-2x} & 9e^{2x} \end{vmatrix} = -xe^{-3x},$$

$$C_3'(x) = \frac{1}{2e^{3x}} \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 1 & 2e^x & 0 \\ 1 & 4e^x & xe^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^{-4x}.$$

Integrando, resulta

$$C_1(x) = \tfrac{1}{2}\int xe^{-2x}dx = -\tfrac{1}{4}e^{-2x}\left(x + \tfrac{1}{2}\right),$$

$$C_2(x) = -\int xe^{-3x}dx = \tfrac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \tfrac{1}{3}\right),$$

$$C_3(x) = \tfrac{1}{2}\int xe^{-4x}dx = -\tfrac{1}{8}e^{-4x}\left(x + \tfrac{1}{4}\right).$$

Por último, construimos la solución particular:

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x) = -e^{-x}\left(\tfrac{1}{24}x + \tfrac{13}{288}\right).$$

Finalmente, la solución general de la ecuación $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = xe^{-x}$ será

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - e^{-x}\left(\tfrac{1}{24}x + \tfrac{13}{288}\right). \qquad \square$$

El método de coeficientes indeterminados se aplica cuando el término independiente $r(x)$ es de una de las formas ya estudiadas en la sección 3.6. Básicamente, estas formas pueden reducirse a tres:

I. $r(x) = e^{ax}(A\cos(bx) + B\,\mathrm{sen}(bx))$, con $a, b, A, B \in \mathbb{R}$. En tal caso puede encontrarse una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x^m e^{ax}(M_1\cos(bx) + M_2\,\mathrm{sen}(bx)),$$

donde m es la multiplicidad de $a + bi$ como raíz del polinomio característico. Las constantes M_1 y M_2 se determinan sustituyendo y_P en la ecuación diferencial.

Ejemplo 3.32. Consideremos la ecuación

$$y''' - 6y' + 9y = e^x\,\mathrm{sen}(x).$$

Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda + 9$, obtenidas mediante el método de Ruffini, son -3 y $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_H(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3e^{3x/2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

En este caso $a + bi = 1 + i$ no es raíz del polinomio característico, por lo que la solución particular será de la forma

$$y_P(x) = e^x(M_1\cos(x) + M_2\,\mathrm{sen}(x)).$$

Sustituyendo en la ecuación, deducimos que $M_1 = \frac{4}{17}$ y $M_2 = \frac{1}{17}$. En consecuencia, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3e^{3x/2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{17}e^x(4\cos(x) + \mathrm{sen}(x)). \quad \square$$

II. $r(x)$ es un polinomio de grado d. Se considera una solución particular de la forma

$$y_P(x) = x^m Q_d(x),$$

donde m es la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio característico, mientras que $Q_d(x)$ es un polinomio de grado d que se determina sustituyendo y_P en la ecuación.

Ejemplo 3.33. Resolvamos la ecuación

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 - x.$$

Aplicando el método de Ruffini al polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$, obtenemos que sus raíces son 1 y $\pm i$. De esta forma, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \operatorname{sen}(x).$$

El grado del polinomio $r(x) = x^2 - x$ es $d = 2$; como 0 no es raíz de $P(\lambda)$, la solución particular debe ser un polinomio de grado dos:

$$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Sustituyendo y_P en la ecuación, obtenemos los valores $A = B = -1$ y $C = 1$. Por tanto, la solución general de la ecuación será

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \operatorname{sen}(x) - x^2 - x + 1. \qquad \square$$

III. $r(x)$ es suma de términos que están en los dos casos anteriores. La solución particular se construye sumando las soluciones particulares que se obtienen considerando cada uno de los sumandos por separado, según hemos establecido en los casos I y II.

3.9. Aplicaciones

3.9.1. Vibraciones mecánicas

Vamos a estudiar la ecuación diferencial que rige el desplazamiento de un medio deformable, como puede ser un muelle, un mástil, un edificio, etc.

Representemos por $x(t)$ al desplazamiento del medio respecto de la posición de equilibrio, en el instante de tiempo t, y sea m su masa. El origen de coordenadas se establece en la posición de equilibrio y se supone que el movimiento hacia la derecha corresponde a valores positivos del desplazamiento.

Supondremos que sobre el medio actúan tres tipos de fuerzas:

- *Fuerza elástica* o de *recuperación*: es restauradora y su módulo es proporcional al desplazamiento. Podemos expresarla como $-kx$, donde k es la constante de recuperación del material y el signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento.

- *Fuerza de amortiguación*, debida al rozamiento: posee un módulo proporcional a la velocidad del medio y se opone al movimiento. Su expresión es $-cx'$, donde c es la constante de amortiguamiento.

- Fuerzas que no son intrínsecas al sistema, sino que obedecen a causas externas (por ejemplo, la acción de un terremoto). Nos referiremos a ellas como *fuerzas externas* y las denotaremos por $g(t)$.

La segunda ley de Newton nos dice que el producto de la masa por la aceleración es igual a la resultante de fuerzas que actúan sobre el sistema. Teniendo en cuenta que $x''(t)$ representa la aceleración del medio, obtenemos entonces:

$$mx'' = -kx - cx' + g(t) \Rightarrow x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{g(t)}{m}.$$

Será conveniente escribir la ecuación en la forma

$$x'' + 2\beta x' + \alpha^2 x' = F(t),$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta = \frac{a}{2m}$ y $F(t) = \frac{g(t)}{m}$. Se trata pues de una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y de coeficientes constantes. En caso de que no actúen fuerzas exteriores, $F(t) \equiv 0$, la ecuación es además homogénea.

Para completar el sistema, debemos considerar condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = v_0, \end{cases}$$

que indican la posición y velocidad del medio en el instante inicial $t = 0$. El problema de valores iniciales correspondiente posee una única solución, que nos permite calcular el desplazamiento del medio respecto de la posición de equilibrio en cada instante.

Ejemplo 3.34. Calculemos el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio de un mástil con masa igual a 1 kg, constante de amortiguamiento igual a 4 N·s/m y constante de recuperación igual a 5 N/m, suponiendo que en el instante inicial recibe una ráfaga de viento soplando hacia la izquierda, cuya velocidad es de 5 m/s.

El problema de valores iniciales a considerar es el siguiente:

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 5x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = -5. \end{cases}$$

El polinomio característico de la ecuación, $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$, tiene raíces $\lambda = -2 \pm i$; por tanto, la solución general de la ecuación será

$$x(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t)).$$

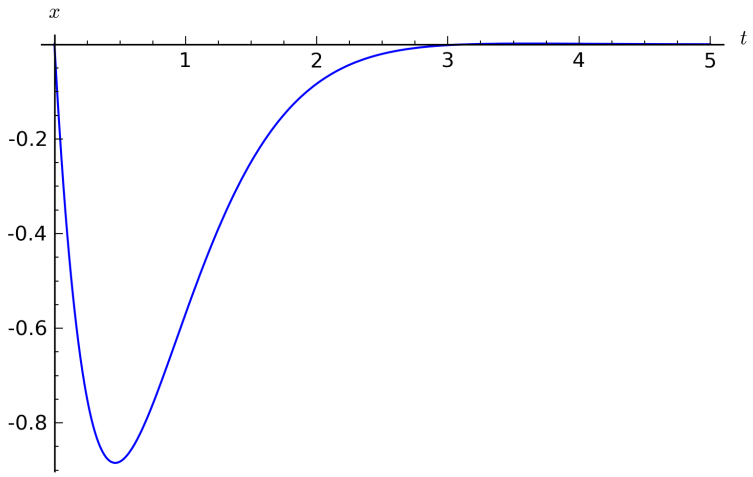


Figura 3.3: Oscilación de un mástil.

Imponiendo las condiciones iniciales, resulta:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ x'(0) = -5 \Rightarrow C_2 - 2\cancelto{0}{C_1} = -5 \Rightarrow C_2 = -5. \end{cases}$$

Por tanto, la solución buscada es

$$x(t) = -5\,\mathrm{sen}(t)e^{-2t},$$

que representa una curva sinusoidal cuyas amplitudes tienden a cero. La gráfica de la solución se representa en la figura 3.3, donde puede observarse cómo las oscilaciones se amortiguan con el paso del tiempo y el mástil tiende hacia su posición de equilibrio.

La figura 3.3 se ha obtenido con el siguiente código Sage:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: ec = diff(x, t, 2) + 4*diff(x, t) + 5*x == 0
sage: sol = desolve(ec, x, ics=[0, 0, -5]); sol
-5*e^(-2*t)*sin(t)
sage: plot(sol, 0, 5)
```

□

A continuación analizaremos los múltiples casos que pueden presentarse en ausencia de fuerzas externas: $F(t) \equiv 0$. Notemos que, en cualquier caso, $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$.

Caso 1. No actúa ninguna fuerza: $\alpha = \beta = 0$. En este caso podemos integrar la ecuación directamente:

$$x'' = 0 \Rightarrow x(t) = C_1 t + C_2.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, obtenemos $C_1 = v_0$ y $C_2 = x_0$, de donde

$$x(t) = v_0 t + x_0, \quad t \geqslant 0.$$

En términos físicos, se trata de un movimiento uniforme. Si no hay velocidad inicial, el móvil permanece en reposo en el punto x_0.

Caso 2. Sólo actúa la fuerza elástica: $\alpha > 0$, $\beta = 0$. La ecuación correspondiente es homogénea:

$$x'' + \alpha^2 x = 0.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$, cuyas raíces son $\pm\alpha i$. Por tanto, la solución general será

$$x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha t).$$

Usando las condiciones iniciales, podemos determinar el valor de las constantes: $C_1 = x_0$ y $C_2 = v_0/\alpha$. En conclusión, la solución del problema de Cauchy es

$$x(t) = x_0 \cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha t), \quad t \geqslant 0,$$

que corresponde a un movimiento periódico. La trayectoria del móvil para $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ y $\alpha = \pi$ se representa en la figura 3.4.

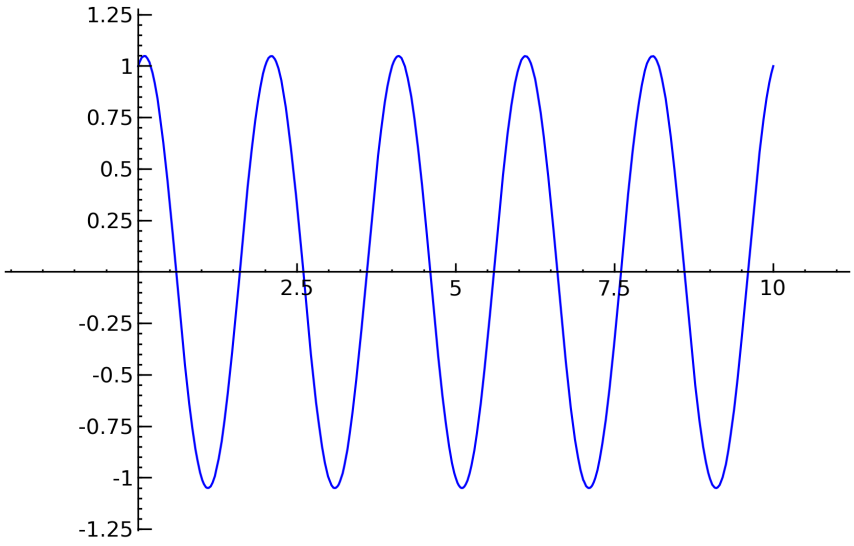


Figura 3.4: Gráfica de $x(t)$ en el caso 2, con $x_0 = 1$, $v_0 = 1$ y $\alpha = \pi$.

Las oscilaciones son producidas por el muelle y continúan indefinidamente, ya que no hay otras fuerzas que las contrarresten.

Caso 3. Sólo actúa la fuerza de rozamiento: $\beta > 0$, $\alpha = 0$. De nuevo tenemos una ecuación homogénea:

$$x'' + 2\beta x' = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\beta\lambda = 0$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2\beta$. Por tanto, la solución general será

$$x(t) = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-2\beta t} = C_1 + C_2 e^{-2\beta t}.$$

A partir de las condiciones iniciales, obtenemos $C_1 = x_0 + \dfrac{v_0}{2\beta}$ y $C_2 = -\dfrac{v_0}{2\beta}$. Por tanto, la solución buscada es

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}), \quad t \geqslant 0.$$

Observemos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 + \frac{v_0}{2\beta},$$

lo que significa que el móvil se irá acercando a la posición $x_0 + \frac{v_0}{2\beta}$ (que estará a la derecha o a la izquierda de x_0, según si $v_0 > 0$ o $v_0 < 0$). En la figura 3.5 se representa la trayectoria del móvil para $x_0 = 0$, $v_0 = 1$ y $\beta = 1$. Notemos que si $v_0 = 0$, el móvil permanece en el mismo lugar en cada instante ya que, al no tener velocidad inicial, no hay nada que lo obligue a cambiar de posición.

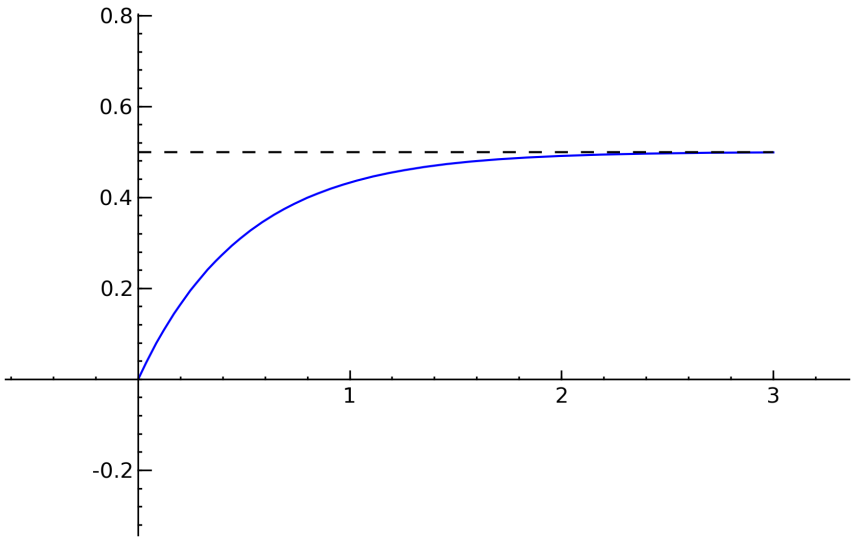


Figura 3.5: Gráfica de $x(t)$ en el caso 3, con $x_0 = 0$, $v_0 = 1$ y $\beta = 1$.

Caso 4. Hay fuerzas elástica y de rozamiento: $\alpha > 0$, $\beta > 0$. La ecuación a estudiar es de nuevo de coeficientes constantes y homogénea:

$$x'' + 2\beta x' + \alpha^2 x = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \alpha^2 = 0$ son de la forma

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$

por lo que la naturaleza de las soluciones dependerá del signo de $\beta^2 - \alpha^2$. Por simplicidad, supondremos que la velocidad inicial es nula: $v_0 = 0$ (esta suposición no resta generalidad a las deducciones que haremos). Hay tres casos para analizar:

Caso 4A. Movimiento elástico sobreamortiguado: $\alpha < \beta$. Al ser $\beta^2 - \alpha^2 > 0$, obtenemos raíces reales distintas: $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ y $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. La solución del problema de Cauchy es

$$x(t) = \frac{x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}), \quad t \geqslant 0.$$

Analicemos el comportamiento de la solución cuando t tiende a infinito. Es claro que $\lambda_2 < 0$; como $\beta > \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, resulta que también $\lambda_1 < 0$. En consecuencia las exponenciales $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ tienden a cero, y por tanto

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Dicho de otra forma, el móvil tiende a la posición de equilibrio. Surge una cuestión natural: ¿pasa el móvil alguna vez por la posición de equilibrio, en un tiempo T finito? Para responder a esta pregunta, basta con ver si la ecuación $x(T) = 0$ tiene alguna solución real $T > 0$:

$$x(T) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e^{\lambda_2 T} = \lambda_2 e^{\lambda_1 T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right).$$

Notemos que $\lambda_1/\lambda_2 > 0$, por ser ambas raíces negativas; esto hace que $\ln(\lambda_1/\lambda_2)$ tenga sentido. Sin embargo, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1/\lambda_2 < 1 \Rightarrow \ln(\lambda_1/\lambda_2) < 0$. Como $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} > 0$, deducimos que $T < 0$, lo cual no es un resultado aceptable. En consecuencia, la ecuación $x(T) = 0$ no posee ninguna solución positiva. En términos físicos, el móvil tiende a la posición de equilibrio pero sin pasar nunca por ésta. En la figura 3.6 se representa la trayectoria del móvil.

Caso 4B. Movimiento elástico críticamente amortiguado: $\alpha = \beta$. Ahora tenemos una raíz real doble: $\lambda = -\beta$. La solución del problema de Cauchy es, en este caso,

$$x(t) = x_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}, \quad t \geqslant 0.$$

Al ser $-\beta < 0$, resulta que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

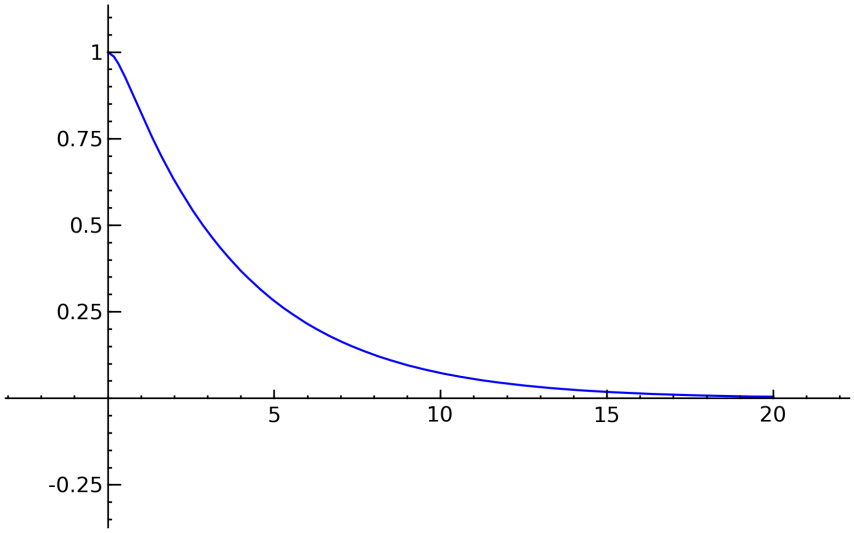


Figura 3.6: Gráfica de $x(t)$ en el caso 4A, con $x_0 = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

por lo que el móvil tiende a la posición de equilibrio conforme el tiempo avanza. Nunca pasará por la posición de equilibrio, ya que la ecuación $x(T) = 0$ no posee solución positiva:

$$x(T) = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta T = 0 \Leftrightarrow T = -\frac{1}{\beta} < 0.$$

Caso 4C. Movimiento elástico subamortiguado: $\alpha > \beta$. En este caso $\beta^2 - \alpha^2 < 0$, por lo que las raíces del polinomio característico son de la forma $\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. La solución del problema de Cauchy es entonces:

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} e^{-\beta t}\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\cos(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \beta \operatorname{sen}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})\right), \quad t \geqslant 0.$$

Usando que $|\cos(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})| \leqslant 1$ y $|\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})| \leqslant 1$, tenemos que

$$0 \leqslant |x(t)| \leqslant \frac{|x_0|}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} e^{-\beta t}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta).$$

Como $e^{-\beta t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, deducimos que $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$, de donde

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Veamos si el móvil pasa por la posición de equilibrio en algún tiempo finito $T > 0$:

$$x(T) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(T\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) = \frac{\operatorname{sen}(T\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\cos(T\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta}.$$

Es posible elegir $T_0 > 0$, con $T_0\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \in (\pi/2, 3\pi/2)$, de modo que se verifique $\operatorname{tg}(T_0\sqrt{\alpha^2-\beta^2}) = -\sqrt{\alpha^2-\beta^2}/\beta$. Entonces todas las soluciones positivas de la ecuación $x(T) = 0$ son

$$T_k = T_0 + \frac{k\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso, la ecuación $x(T) = 0$ admite infinitas soluciones positivas. La interpretación física es sencilla: conforme avanza el tiempo, el móvil tiende a la posición de equilibrio pero oscilando alrededor de ésta; al aumentar el tiempo disminuye la amplitud de dichas oscilaciones. En la figura 3.7 se representa la solución $x(t)$ correspondiente a $x_0 = 1$, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$; notemos que, en este caso, $|x(t)| \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} e^{-t}$.

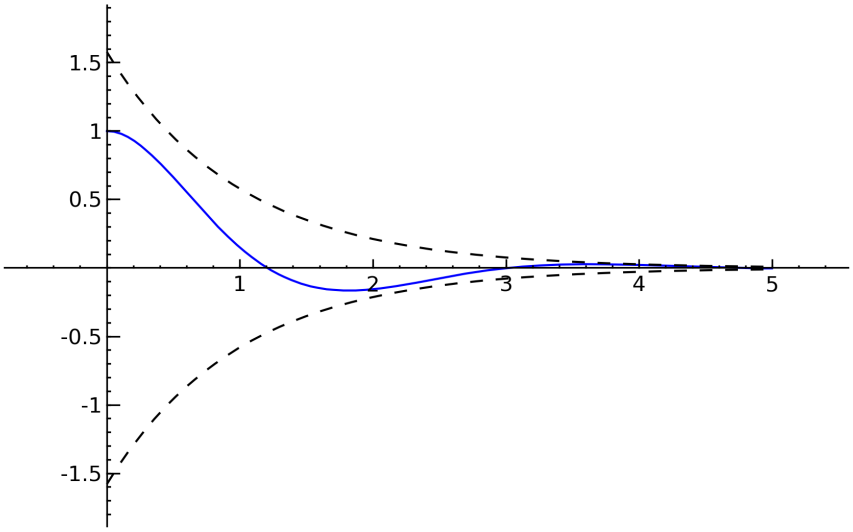


Figura 3.7: Gráfica de $x(t)$ en el caso 4C. Las líneas discontinuas son las funciones $\pm\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} e^{-t}$.

Vamos a concluir esta sección con el análisis de un caso en el que se aplica al móvil una fuerza externa periódica de la forma $F(t) = \cos(\omega t)$, $\omega > 0$, partiendo del reposo. Por simplicidad, supondremos que no hay rozamiento. Consideramos entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + \alpha^2 x = \cos(\omega t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda = \pm\alpha i$, por lo que debemos distinguir dos casos:

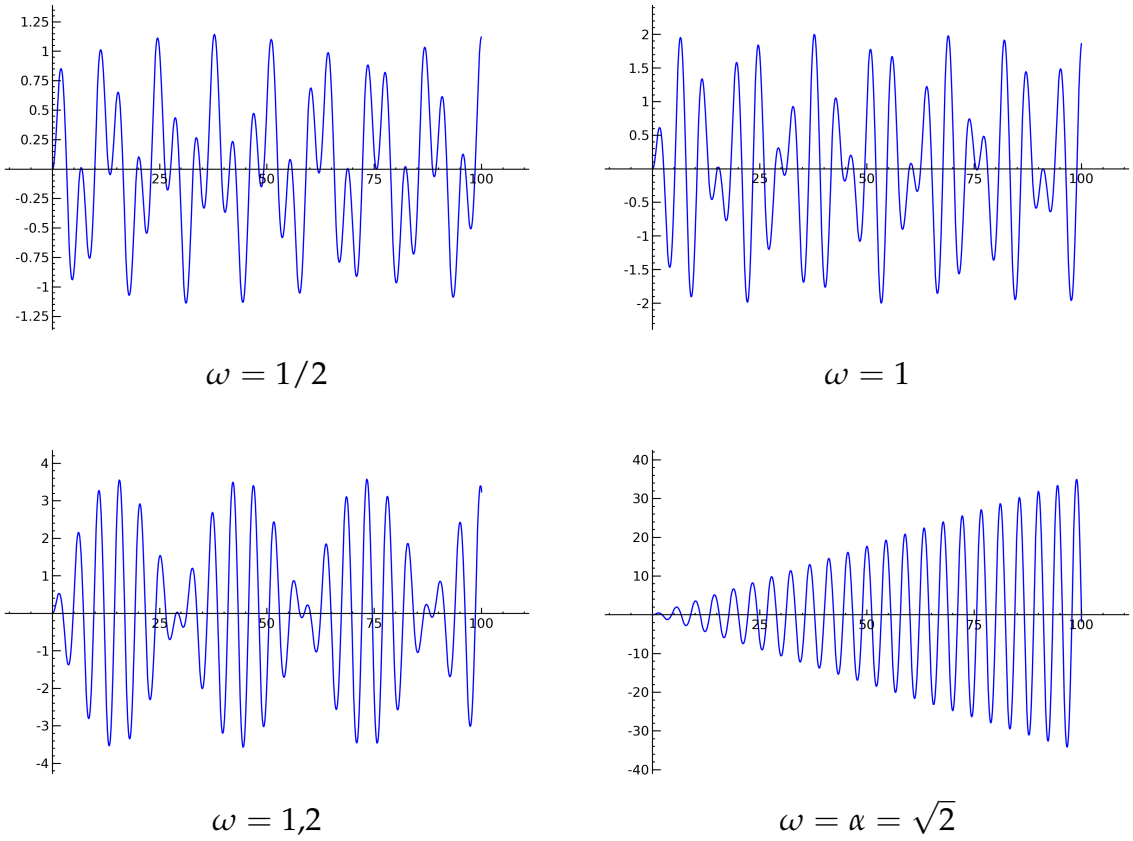


Figura 3.8: Problema con fuerza periódica externa: soluciones obtenidas para distintos valores del parámetro ω. El fenómeno de resonancia puede apreciarse en la última figura.

- $\alpha \neq \omega$. En tal caso ωi no es raíz del polinomio característico, por lo que la solución del problema de Cauchy es de la forma

$$x(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\alpha t)), \quad t \geqslant 0.$$

  Se trata de un movimiento periódico alrededor de la posición de equilibrio.

- $\alpha = \omega$. Al ser $\omega i = \alpha i$ raíz del polinomio característico, la solución del problema de Cauchy viene dada por

$$x(t) = \frac{t}{2\alpha}\operatorname{sen}(\alpha t), \quad t \geqslant 0.$$

  En este caso la amplitud de las oscilaciones aumenta conforme avanza el tiempo: este fenómeno se conoce como *resonancia*. En términos físicos, el móvil oscilaría indefinidamente alrededor de la posición de equilibrio, pero alejándose cada vez

más de ésta en cada oscilación. Al ser la longitud del muelle finita, llegará un momento en que el sistema cambie su naturaleza (por ejemplo, el muelle podría romperse), cambiando de esta forma la ecuación del movimiento.

En el conjunto de figuras 3.8 puede apreciarse cómo varía la solución del problema conforme el parámetro ω se acerca a $\alpha = \sqrt{2}$. El fenómeno de resonancia puede apreciarse en la última figura.

3.9.2. Deflexión y pandeo de vigas

Consideremos una viga de longitud L situada en posición horizontal y cuyos extremos están fijos. La deformación que sufre dicha viga puede modelizarse mediante el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{w}{2EI}x(L-x), \quad x \in [0, L], \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 0, \end{cases}$$

donde $y(x)$ representa el desplazamiento o *deflexión* de la viga respecto de la horizontal en el punto $x \in [0, L]$, E es el módulo de elasticidad de Young, I denota el momento de inercia y w es el peso por unidad de longitud de la viga. Las condiciones de contorno establecen que los extremos de la viga permanecen fijos.

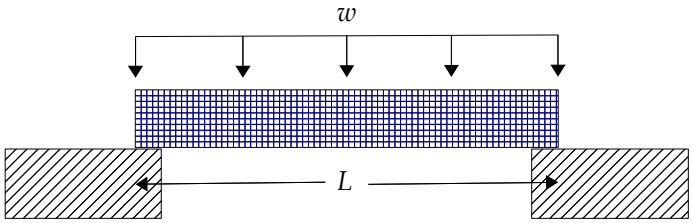


Figura 3.9: Deflexión de una viga empotrada: esquema.

En este caso la ecuación diferencial puede resolverse mediante una doble integración. Si llamamos $\alpha = -\frac{w}{2EI}$, resulta que

$$y''(x) = \alpha x(L-x) \Rightarrow y'(x) = \int \alpha x(L-x)\,dx \Rightarrow y'(x) = \alpha\left(\tfrac{1}{2}Lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right) + C_1,$$

siendo C_1 una constante de integración. De nuevo integramos para obtener:

$$y(x) = \int \left[\alpha\left(\tfrac{1}{2}Lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right) + C_1\right]dx \Rightarrow y(x) = \alpha\left(\tfrac{1}{6}Lx^3 - \tfrac{1}{12}x^4\right) + C_1x + C_2,$$

donde C_2 es otra constante de integración. Las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \\ y(L) = 0 \Rightarrow \frac{1}{12}\alpha L^4 + C_1 L + \cancelto{0}{C_2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{12}\alpha L^3. \end{cases}$$

Por tanto, la única solución del problema de contorno viene dada por

$$y(x) = \frac{w}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x\right).$$

En particular, podemos determinar la deflexión máxima que, por simetría, se da en el punto $x_{\max} = L/2$:

$$y_{\max} = y(L/2) = \frac{w}{24EI}\left(\frac{L^4}{16} - 2\frac{L^4}{8} + \frac{L^4}{2}\right) = \frac{5wL^4}{384EI}.$$

Ejemplo 3.35. Consideremos una barra de longitud $L = 2$ m con módulo de Young $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, momento de inercia $I = 7{,}85 \cdot 10^{-9}$ m^4 y $w = 95{,}54$ N/m; estos datos corresponden a una barra de acero con sección transversal circular de 2 cm de diámetro. En tal caso, la deflexión máxima de la barra es:

$$y_{\max} = \frac{5 \cdot 95{,}54 \cdot 2^4}{384 \cdot (2 \cdot 10^{11}) \cdot (7{,}85 \cdot 10^{-9})} \approx 0{,}0127 \text{ m}.$$

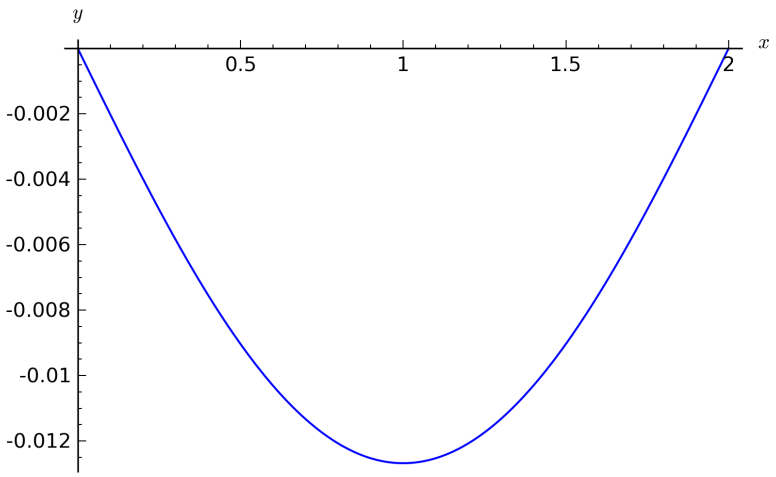


Figura 3.10: Deflexión de una viga.

En la figura 3.10 se representa la correspondiente curva de deflexión. Téngase en cuenta que dicha curva corresponde a la gráfica de la función $-y(x)$, ya que $y(x)$ representa el desplazamiento de la viga respecto de la horizontal.

He aquí el código Sage para generar la figura 3.10:

```
sage: var('x')
sage: # datos del problema
sage: L = 2
sage: E = 2e11
sage: I = 7.85e-9
sage: w = 95.54
sage: y = function('y', x)
sage: sol = desolve(diff(y, x, 2) == -w/(2*E*I)*x*(L-x), y,
      ics=[0, 0, L, 0]); sol
372/146713*x^4 - 1488/146713*x^3 + 2976/146713*x
sage: plot(-sol, 0, L)
```

También podemos calcular $y_{\max}$ de la siguiente forma:

```
sage: sol.find_maximum_on_interval(0, L)
(0.012677813145392703, 0.99999999999999989)
```

El primer valor es $y_{\max}$ y el segundo la correspondiente abscisa $x_{\max}$. □

En general, la teoría de elasticidad determina que, para deflexiones relativamente pequeñas de una viga horizontal uniforme, la curva de deflexión $y(x)$ viene determinada por la ecuación diferencial

$$EIy^{(4)}(x) = w, \quad x \in [0, L],$$

donde E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia, w es el peso de la viga y L es su longitud. La solución de esta ecuación diferencial puede obtenerse por integración directa. En efecto, si integramos una vez obtenemos

$$EIy^{(3)}(x) = wx + C_1;$$

integrando de nuevo, resulta:

$$EIy''(x) = \tfrac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2;$$

una nueva integación nos lleva a:

$$EIy'(x) = \tfrac{1}{6}wx^3 + \tfrac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

y la última integración nos da:

$$EIy(x) = \tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Para determinar las constantes arbitrarias C_1, C_2, C_3 y C_4, debemos imponer condiciones de contorno adecuadas en los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la viga.

Dependiendo del tipo de soporte, en cada extremo de la viga puede considerarse una de las siguientes condiciones:

- Sostenida simplemente: $y = y'' = 0$.

- Empotrada o fija en el extremo: $y = y' = 0$.
- Extremo libre: $y'' = y^{(3)} = 0$.

Ejemplo 3.36. Por ejemplo, si consideramos una viga en voladizo, con el extremo $x = 0$ fijo y el extremo $x = L$ libre, tendríamos las siguientes condiciones de contorno:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y^{(3)}(L) = 0.$$

Imponiendo estas condiciones en la solución general, se obtiene la siguiente curva de deflexión:

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$$

¿Cuál será la deflexión máxima en este caso? Para determinar dicho valor, igualamos la derivada de $y(x)$ a cero:

$$\begin{aligned} y'(x) = 0 \Rightarrow \frac{w}{6EI}x(x^2 - 3Lx + 3L^2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 3Lx + 3L^2 = 0 \text{ (no tiene raíces reales).} \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, la derivada sólo se anula en $x = 0$, que es el extremo fijo. Esto nos indica que la función $y(x)$ es estrictamente creciente, por lo que la deflexión máxima se producirá en el extremo $x = L$ y será:

$$y_{\max} = y(L) = \frac{w}{8EI}L^4. \qquad \square$$

A continuación vamos a estudiar el problema del *pandeo* de una viga. Para ello, consideremos una viga situada en vertical y fijada por sus extremos, a la que se aplica una carga P en uno de ellos. En tal caso, la forma de la viga $y(x)$ puede obtenerse como solución del problema de contorno

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{P}{EI}y(x), \quad x \in [0, L], \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 0, \end{cases}$$

Llamando $\alpha = \frac{P}{EI}$, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$y'' + \alpha y = 0.$$

Al ser $\alpha > 0$, las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + \alpha = 0$ son complejas: $\lambda = \pm\sqrt{-\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha}$. En tal caso, la solución general tendrá la forma

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}x).$$

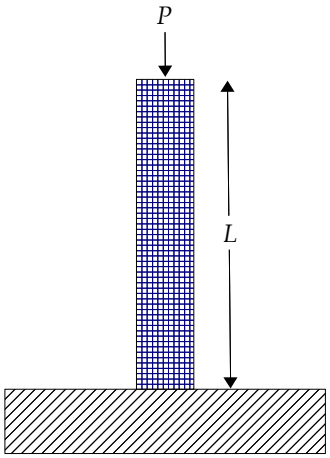


Figura 3.11: Pandeo de una viga: esquema.

Imponiendo las condiciones de contorno, obtenemos:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ y(L) = 0 \Rightarrow \cancelto{0}{C_1}\cos(\sqrt{\alpha}L) + C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Rightarrow C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha}L) = 0. \end{cases}$$

Si $C_2 = 0$, obtenemos la solución trivial: $y(x) \equiv 0$. Esto significa que la viga no se deforma, cosa que sucede cuando la carga P aplicada es pequeña. Para obtener una solución no trivial del problema hemos de suponer $C_2 \neq 0$, lo que implica que $\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha}L) = 0$. Es decir, los únicos valores de α para los que hay soluciones no triviales del problema de contorno son aquellos que verifican la condición

$$\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}L = n\pi,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

De este modo, la viga no se deforma a menos que

$$\frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

donde n es un natural arbitrario. Sin embargo, como estamos interesados en el valor mínimo para el que se produce el pandeo, tomaremos $n = 1$.

Observación. A la primera carga que provoca la deformación de la viga, $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, se la conoce con el nombre de *primera carga crítica* o *carga de pandeo de Euler*. □

El problema de contorno posee pues infinitas soluciones, de la forma

$$y(x) = C\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad 0 \neq C \in \mathbb{R}.$$

En este caso, la amplitud C de pandeo permanece indeterminada.

Intentemos resolver el problema de contorno directamente en Sage:

```
sage: var('x, L, P, E, I')
sage: assume(P>0, E>0, I>0)
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) == -P/(E*I)*y
sage: desolve(ec, [y, x], ics=[0, 0, L, 0])
0
```

Como vemos, sólo se ha determinado la solución trivial. Si sustituimos $\frac{P}{EI}$ por $\frac{\pi^2}{L^2}$, obtenemos la solución correspondiente a la carga de pandeo de Euler:

```
sage: ec = diff(y, x, 2) == -(pi/L)^2*y
sage: desolve(ec, [y, x], ics=[0, 0, L, 0])
r1*sin(pi*x/L)
```

CAPÍTULO

4

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1. Introducción

Un *sistema de ecuaciones diferenciales de orden n* está formado por n ecuaciones diferenciales de primer orden en forma normal, esto es,

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases}$$

donde $x \in [a, b]$ es la variable independiente e $y_1, \ldots, y_n$, son las variables dependientes.

Una *solución* del sistema está formada por n funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, derivables con continuidad, que satisfacen todas las ecuaciones en cada punto $x \in [a, b]$.

Ejemplo 4.1. Es inmediato comprobar que una solución del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$$

está formada por las funciones $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$. □

La *solución general* del sistema consta de n funciones dependientes de n constantes arbitrarias, que proporcionan todas las posibles soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \vdots \\ y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Ejemplo 4.2. La solución general del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1, \end{cases}$$

está formada por las funciones

$$\begin{cases} y_1(x, C_1, C_2) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x), \\ y_2(x, C_1, C_2) = C_1 \operatorname{sen}(x) - C_2 \cos(x). \end{cases}$$

Más adelante veremos cómo obtener este resultado.

El comando de Sage `desolve_system` sirve para calcular la solución de un sistema:

```
sage: var('x')
sage: y1 = function('y1', x)
sage: y2 = function('y2', x)
sage: ec1 = diff(y1, x) == -y2
sage: ec2 = diff(y2, x) == y1
sage: desolve_system([ec1, ec2], [y1, y2])
[y1(x) == -sin(x)*y2(0) + cos(x)*y1(0),
 y2(x) == sin(x)*y1(0) + cos(x)*y2(0)]
```

En este caso, `y1(0)` representa la constante arbitraria C_1, mientras que `y2(0)` equivale a $-C_2$. El porqué de esta notación quedará claro en el siguiente ejemplo. □

Un *problema de valores iniciales* para un sistema de ecuaciones diferenciales se construye añadiendo n condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} y_1(x_0) = \bar{y}_1, \\ y_2(x_0) = \bar{y}_2, \\ \vdots \\ y_n(x_0) = \bar{y}_n, \end{cases}$$

con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3. El problema de valores iniciales definido por el sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1, \end{cases}$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

tiene una única solución formada por las funciones $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$.

En efecto, a partir de la solución general del sistema (ejemplo 4.2), podemos determinar de forma única los valores de las constantes C_1 y C_2 imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \Rightarrow C_1 \cancelto{1}{\cos 0} + C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sin} 0} = 1 \Rightarrow C_1 = 1, \\ y_2(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cancelto{0}{\operatorname{sen} 0} - C_2 \cancelto{1}{\cos 0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

De esta forma, la solución del problema de valores iniciales será:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) = \cos(x), \\ y_2(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) - C_2 \cos(x) = \operatorname{sen}(x). \end{cases}$$

Las condiciones iniciales se especifican en Sage mediante el parámetro `ics`:

```
sage: var('x')
sage: y1 = function('y1', x)
sage: y2 = function('y2', x)
sage: ec1 = diff(y1, x) == -y2
sage: ec2 = diff(y2, x) == y1
sage: desolve_system([ec1, ec2], [y1, y2], ics=[0, 1, 0])
[y1(x) == cos(x), y2(x) == sin(x)]
```

Si queremos representar gráficamente las componentes de la solución en el intervalo $[0, 2\pi]$, añadimos las siguientes líneas de código:

```
sage: [solx, soly] = desolve_system([ec1, ec2], [y1, y2], ics=[0, 1, 0])
sage: solx = solx.rhs()
sage: soly = soly.rhs()
sage: fig1 = plot(solx, 0, 2*pi, color='blue', legend_label='cos(x)')
sage: fig2 = plot(soly, 0, 2*pi, color='green', legend_label='sen(x)')
sage: show(fig1 + fig2)
```

El resultado obtenido puede verse en la figura 4.1. □

Observación. En el ejemplo anterior se han representado de forma independiente las gráficas de las componentes de la solución $y_1(x)$ e $y_2(x)$. También es posible interpretar dichas funciones como las componentes de una curva plana, que recibe el nombre de *órbita* o *trayectoria*. Concretamente, $(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ sería una parametrización de la órbita asociada al punto $(1, 0)$ determinado por las condiciones iniciales.

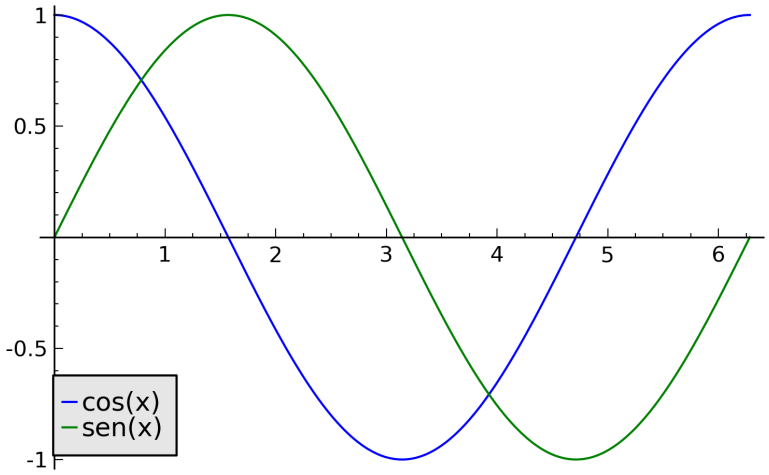


Figura 4.1: Solución del ejemplo 4.3 en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Un tipo importante de sistemas lo constituyen los *sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes*, que son de la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n', \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n', \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n', \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Este tipo de sistemas puede escribirse en forma matricial:

$$Y' = AY,$$

donde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El estudio de sistemas no lineales está fuera del alcance del presente trabajo, ya que necesita del uso de herramientas avanzadas de Análisis Matemático. Por ello, restringiremos nuestro estudio a sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. Además, por simplicidad, nos centraremos en sistemas de orden dos.

En el caso particular de sistemas de dos ecuaciones ($n = 2$) es usual denotar la variable independiente por t (en lugar de x) y las variables dependientes por x e y (en lugar de y_1 e y_2). Asimismo, para sistemas con tres ecuaciones ($n = 3$) se suelen usar las variables x, y y z en lugar de y_1, y_2 e y_3. A partir de ahora seguiremos este criterio.

Vamos a considerar pues un sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

donde $x \equiv x(t)$, $y \equiv y(t)$ y los coeficientes a, b, c y d son números reales. A veces será conveniente escribir el sistema en forma matricial:

$$X' = AX,$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado permite asegurar la existencia y unicidad de solución para un problema de valores iniciales.

Teorema (de existencia y unicidad)**.** *Fijados t_0, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $(x(t), y(t))$ del sistema*

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

tal que $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Dicha solución está definida para toda $t \in \mathbb{R}$.

La estructura de la solución general de un sistema lineal viene dada en el siguiente resultado.

Teorema. *Si $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ son soluciones particulares del sistema tales que*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

entonces la solución general del sistema es de la forma

$$\begin{cases} x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \\ y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \end{cases}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Observación. De modo análogo al caso de ecuaciones de segundo orden, diremos que las funciones $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ forman un *sistema fundamental de soluciones* y $W(t)$ es su *wronskiano*.

En las siguientes secciones estudiaremos dos formas diferentes de determinar la solución general de un sistema lineal. Ambas técnicas pueden generalizarse de forma natural al caso de un sistema lineal de orden n.

4.2. Método de sustitución

En esta sección vamos a establecer una equivalencia entre un sistema lineal y una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Esta relación proporciona un método de resolución denominado *método de sustitución*.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

y supongamos que el coeficiente b es distinto de cero (si $b = 0$ podemos resolver directamente la primera ecuación: $x' = ax$; a continuación sustituimos $x(t)$ en la segunda ecuación, que sería de tipo lineal, y la resolvemos para obtener $y(t)$). Derivando en la primera ecuación, resulta

$$x'' = ax' + by' = ax' + b(cx + dy),$$

donde hemos sustituido y' usando la segunda ecuación. De la primera ecuación despejamos

$$y = \frac{x' - ax}{b}.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior, obtenemos

$$x'' = ax' + b\left(cx + \frac{d}{b}(x' - ax)\right) = (a + d)x' + (bc - ad)x.$$

Así pues, tenemos la siguiente ecuación de segundo orden:

$$x'' - \operatorname{tr}(A)x' + \det(A)x = 0.$$

Recíprocamente, dada la ecuación homogénea

$$x'' + px' + qx = 0,$$

definimos $y = x'$. Entonces

$$y' = x'' = -px' - qx = -py - qx.$$

Obtenemos así el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -qx - py. \end{cases}$$

Hemos demostrado así la equivalencia anteriormente comentada.

En el caso de un problema de valores iniciales, también hay una equivalencia entre las condiciones iniciales. Si tenemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

para el sistema, estas se escriben como

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = ax_0 + by_0, \end{cases}$$

para la ecuación de segundo orden. Recíprocamente, si las condiciones iniciales para la ecuación de segundo orden son de la forma

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_0', \end{cases}$$

entonces las condiciones para el sistema son

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = x_0'. \end{cases}$$

Ejemplo 4.4. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Derivamos en la primera ecuación

$$x'' = x' + y',$$

y sustituimos y' usando la segunda ecuación:

$$x'' = x' + 2x - y.$$

A continuación, despejamos y de la primera ecuación

$$y = x' - x,$$

y sustituimos en la expresión anterior:

$$x'' = x' + 2x - (x' - x) = 3x \Rightarrow x'' - 3x = 0.$$

Respecto a las condiciones iniciales, notemos que

$$x'(0) = x(0) + y(0) = 1 + (-1) = 0.$$

Hemos obtenido así el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' - 3x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

que es equivalente al problema de valores iniciales para el sistema original.

La solución del problema de valores iniciales para el sistema usando Sage es:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: y = function('y', t)
sage: ec1 = diff(x, t) == x + y
sage: ec2 = diff(y, t) == 2*x - y
sage: desolve_system([ec1, ec2], [x, y], ics=[0, 1, -1])
[x(t) == cosh(sqrt(3)*t),
 y(t) == sqrt(3)*sinh(sqrt(3)*t) - cosh(sqrt(3)*t)]
```

mientras que para la ecuación de segundo orden es:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: ec = diff(x, t, 2) - 3*x == 0
sage: desolve(ec, x, ics=[0, 1, 0])
1/2*e^(-sqrt(3)*t) + 1/2*e^(sqrt(3)*t)
```

¿Se obtiene la misma solución para $x(t)$ en ambos casos? Sí, si tenemos en cuenta la definición del seno hiperbólico (véase el capítulo 3). Por último, para determinar $y(t)$ usamos la igualdad $y = x' - x$:

```
sage: sol = desolve(ec, x, ics=[0, 1, 0])
sage: diff(sol, t) - sol
-1/2*sqrt(3)*e^(-sqrt(3)*t) + 1/2*sqrt(3)*e^(sqrt(3)*t)
- 1/2*e^(-sqrt(3)*t) - 1/2*e^(sqrt(3)*t)
```

Aplicando la definiciones del seno y el coseno hiperbólicos, podemos comparar los resultados obtenidos para $y(t)$. □

La equivalencia establecida nos proporciona un método para la resolución de sistemas lineales. Dado un sistema lineal, lo escribimos como ecuación homogénea de segundo orden:

$$x'' - \operatorname{tr}(A)x' + \det(A)x = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Una vez conocidas las raíces, podemos escribir directamente la solución general $x(t)$ de la ecuación diferencial, que dependerá de dos constantes arbitrarias. Por último, deshacemos el cambio realizado

$$y = \frac{x' - ax}{b}$$

para obtener la solución $y(t)$. Observemos que la solución del sistema dependerá también de dos constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.5. Resolvamos el problema de Cauchy del ejemplo anterior. Habíamos pasado del sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$$

a la ecuación de segundo orden

$$x'' - 3x = 0.$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 - 3 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la solución general de la ecuación será

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{3}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{3}\,t}.$$

Usemos las condiciones iniciales para calcular las constantes C_1 y C_2:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ x'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,C_1 - \sqrt{3}\,C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = \tfrac{1}{2}.$$

La solución $x(t)$ es, por tanto,

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}\,t} + e^{-\sqrt{3}\,t}\right).$$

Para determinar $y(t)$ usamos la primera ecuación:

$$y(t) = x'(t) - x(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\sqrt{3}\,t} - e^{-\sqrt{3}\,t}\right) - \tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}\,t} + e^{-\sqrt{3}\,t}\right).$$

Obtenemos así la solución $y(t)$:

$$y(t) = \tfrac{\sqrt{3}-1}{2} e^{\sqrt{3}\,t} - \tfrac{\sqrt{3}+1}{2} e^{-\sqrt{3}\,t}.$$

Recapitulando, las funciones

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{3}\,t} + e^{-\sqrt{3}\,t}\right), \\ y(t) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}e^{\sqrt{3}\,t} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}e^{-\sqrt{3}\,t}, \end{cases}$$

conforman la solución del problema de Cauchy. □

Observación. Notemos que en el caso $b = 0$ la primera ecuación se reduce a $x' = ax$, que puede resolverse directamente. Una vez calculada $x(t)$, se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve ésta para determinar $y(t)$. □

Ejemplo 4.6. Calculemos la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Como en la primera ecuación tan sólo aparece la variable x, podemos resolverla directamente. Separando variables, resulta

$$x' = 2x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int 2\,dt \Rightarrow x(t) = C_1 e^{2t}.$$

Ahora sustituimos $x(t)$ en la segunda ecuación, para obtener así una ecuación lineal:

$$y' = C_1 e^{2t} - y.$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_H(t) = C_2 e^{-t}.$$

Mediante el método de variación de la constante, se llega a que una solución particular es

$$y_P(t) = \frac{C_1}{3} e^{2t}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación será

$$y(t) = \frac{C_1}{3} e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Resumiendo, las funciones

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t}, \\ y(t) = \frac{C_1}{3} e^{2t} + C_2 e^{-t}, \end{cases}$$

forman la solución general del sistema. □

Observación. La técnica del método de sustitución puede aplicarse también para la resolución de sistemas no homogéneos, de la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + r_1(t), \\ y' = cx + dy + r_2(t). \end{cases}$$

En tal caso, al construir la ecuación de segundo orden habrá que aplicar el método de variación de las constantes o el de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular de la misma. □

Observación. Puede establecerse una equivalencia entre un sistema de orden n y una ecuación diferencial de orden n, siguiendo un procedimiento análogo al explicado anteriormente. Asimismo, existe una equivalencia entre un problema de valores iniciales para una ecuación de orden n y para un sistema del mismo orden. □

4.3. Método de autovalores

Recordemos que un sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

puede escribirse en forma matricial como

$$X' = AX,$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Diremos que un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de la matriz A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Un vector v con esta propiedad es un *autovector* asociado al autovalor λ.

Observación. Un autovector nunca es único. De hecho, si v es un autovector de A entonces αv también lo es, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. □

La relación $Av = \lambda v$ puede escribirse también como

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

siendo I la matriz identidad. Se obtiene así un sistema lineal homogéneo cuyas incógnitas son las componentes del vector v. Dicho sistema tendrá solución no nula únicamente si es compatible indeterminado, es decir, si

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta es la denominada *ecuación característica* de la matriz A, cuyas soluciones λ proporcionan los autovalores de A.

Observación. Es fácil ver que los autovalores de la matriz A coinciden con las raíces del polinomio característico $P(\lambda)$ definido como

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

donde $\operatorname{tr}(A)$ y $\det(A)$ son, respectivamente, la traza y el determinante de la matriz A:

$$\operatorname{tr}(A) = a + d, \qquad \det(A) = ad - bc. \qquad \square$$

Ejemplo 4.7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

calculemos sus autovalores resolviendo la ecuación característica asociada:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}.$$

Para calcular un autovector $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ asociado a λ, hemos de resolver el sistema asociado:

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)\alpha + \beta = 0, \\ 2\alpha - (1+\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

Despejando β en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos la siguiente relación:

$$(\lambda^2 - 3)\alpha = 0.$$

Cuando $\lambda = \pm\sqrt{3}$, esta ecuación admite cualquier valor de α como solución (como era de esperar). Tomando por ejemplo $\alpha = 1$, resulta que $\beta = \pm\sqrt{3} - 1$. Por tanto, autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = \sqrt{3}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ son, respectivamente,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular los autovalores de una matriz A en Sage, primero definimos dicha matriz usando el comando `matrix` y luego accedemos a su método `eigenvalues`:

```
sage: A = matrix([[1, 1], [2, -1]])
sage: A.eigenvalues()
[-1.732050807568878?, 1.732050807568878?]
```

(nótese que $\sqrt{3} = 1{,}732050807568878\ldots$). Para determinar los autovectores asociados, escribimos:

```
sage: A.eigenvectors_right()
[(-1.732050807568878?, [(1, -2.732050807568878?)], 1),
 (1.732050807568878?, [(1, 0.732050807568878?)], 1)]
```

El resultado es una lista con dos elementos, escritos entre paréntesis y separados por una coma. En cada uno de estos elementos, el primer valor es un autovalor, el segundo es un autovector asociado, y el tercero representa la multiplicidad algebraica del autovalor. □

Observemos que la ecuación característica es una ecuación polinomial de segundo grado, por lo que pueden presentarse tres posibilidades:

I. Autovalores reales distintos.

II. Autovalor real doble.

III. Autovalores complejos conjugados.

A continuación describiremos la forma de la solución general del sistema en cada uno de los casos.

I. Autovalores reales distintos: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = \beta_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias y $(\alpha_i, \beta_i)^t$ un autovector asociado a λ_i, para $i = 1, 2$.

Analicemos de dónde surge la expresión anterior. Para $i = 1, 2$, asociemos al autovalor λ_i funciones de la forma

$$\begin{cases} x_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}, \\ y_i(t) = \beta_i e^{\lambda_i t}. \end{cases}$$

A continuación, veamos qué condiciones deben verificar los coeficientes α_i y β_i para que dichas funciones formen una solución del sistema:

$$\begin{cases} x_i'(t) = a x_i(t) + b y_i(t) \Rightarrow \alpha_i \lambda_i e^{\lambda_i t} = a\alpha_i e^{\lambda_i t} + b\beta_i e^{\lambda_i t}, \\ y_i'(t) = c x_i(t) + d y_i(t) \Rightarrow \beta_i \lambda_i e^{\lambda_i t} = c\alpha_i e^{\lambda_i t} + d\beta_i e^{\lambda_i t}. \end{cases}$$

Simplificando y agrupando, obtenemos

$$\begin{cases} (a-\lambda_i)\alpha_i + b\beta_i = 0 \\ c\alpha_i + (d-\lambda_i)\beta_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda_i & b \\ c & d-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, el vector $(\alpha_i, \beta_i)^t$ debe ser un autovector de la matriz de coeficientes A, asociado al autovalor λ_i.

Por otra parte, notemos que

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} & \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ya que dos autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes (esto es fácil de demostrar).

En resumen, si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de A, podemos construir la solución general del sistema como

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = \beta_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.8. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Resolvamos la ecuación característica para determinar los autovalores de A:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -3. \end{cases}$$

Para calcular un autovector asociado a un autovalor λ, resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)\alpha + \beta = 0, \\ 4\alpha - (2+\alpha)\beta = 0. \end{cases}$$

Despejando β en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos:

$$(\lambda^2 + \lambda - 6)\alpha = 0.$$

Para $\lambda = 2$ o $\lambda = -3$ el primer factor es nulo, por lo que podemos tomar un valor arbitrario no nulo de α, por ejemplo, $\alpha = 1$; el valor correspondiente de β se determina a partir de la primera ecuación. De esta forma, se obtienen los siguientes autovectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Veamos qué resultado produce Sage:

```
sage: A = matrix([[1, 1], [4, -2]])
sage: A.eigenvectors_right()
[(2, [(1, 1)], 1), (-3, [(1, -4)], 1)]
```

Finalmente, las funciones

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}, \\ y(t) = C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{-3t}, \end{cases}$$

forman la solución general del sistema.

Directamente, en Sage:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: y = function('y', t)
sage: ec1 = diff(x, t) == x + y
sage: ec2 = diff(y, t) == 4*x - 2*y
sage: desolve_system([ec1, ec2], [x, y])
[x(t) == 1/5*(x(0) - y(0))*e^(-3*t) + 1/5*(4*x(0) + y(0))*e^(2*t),
 y(t) == -4/5*(x(0) - y(0))*e^(-3*t) + 1/5*(4*x(0) + y(0))*e^(2*t)]
```

Observemos, de nuevo, que las constantes arbitrarias C_1 y C_2 vienen dadas en función de los valores iniciales $x(0)$ e $y(0)$. □

En los dos casos restantes se puede razonar de manera similar. A continuación damos la forma de la solución general del sistema en cada uno de ellos.

II. Autovalor real doble: λ. La solución general del sistema es, en este caso,

$$\begin{cases} x(t) = \alpha C_1 e^{\lambda t} + C_2 (M_1 + M_2 t) e^{\lambda t}, \\ y(t) = \beta C_1 e^{\lambda t} + C_2 (N_1 + N_2 t) e^{\lambda t}, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, (α, β) un autovector asociado a λ, y M_1, M_2, N_1 y N_2 valores a determinar por sustitución en el sistema.

Ejemplo 4.9. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$

y calculemos sus autovalores a partir de la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{(raíz doble)}.$$

Determinemos un autovector asociado a $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0, \\ \alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes: $\alpha = 2\beta$; podemos pues tomar $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Usando Sage, obtenemos:

```
sage: A = matrix([[3, -4], [1, -1]])
sage: A.eigenvectors_right()
[(1, [(1, 1/2)], 2)]
```

Es decir, se tiene un autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad dos y autovector asociado $(1, 1/2)^t$, que es proporcional al obtenido anteriormente.

La solución general del sistema será de la forma

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^t + C_2(M_1 + M_2t)e^t, \\ y(t) = C_1e^t + C_2(N_1 + N_2t)e^t. \end{cases}$$

Los coeficientes M_1, M_2, N_1 y N_2 se determinan a partir de las ecuaciones del sistema. Sustituyendo en la primera ecuación y agrupando convenientemente, resulta

$$(M_1 + M_2) + M_2t = (3M_1 - 4N_1) + (3M_2 - 4N_2)t.$$

Igualando los coeficientes del mismo orden, obtenemos

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = 3M_1 - 4N_1 \Rightarrow 2M_1 - M_2 = 4N_1, \\ M_2 = 3M_2 - 4N_2 \Rightarrow M_2 = 2N_2. \end{cases}$$

De igual forma, a partir de la segunda ecuación tenemos

$$N_1 + N_2 + N_2t = M_1 - N_1 + (M_2 - N_2)t \Rightarrow \begin{cases} 2N_1 + N_2 = M_1, \\ M_2 = 2N_2. \end{cases}$$

Observemos que las cuatro relaciones obtenidas pueden reducirse a dos:

$$\begin{cases} 2N_1 + N_2 = M_1, \\ M_2 = 2N_2. \end{cases}$$

Tomando, por ejemplo, $M_1 = 1$ y $N_2 = 1$, deducimos que $M_2 = 2$ y $N_1 = 0$.

Finalmente, las funciones

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^t + C_2(1 + 2t)e^t, \\ y(t) = C_1e^t + C_2te^t, \end{cases}$$

definen la solución general del sistema.

Veamos qué opina Sage:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: y = function('y', t)
sage: ec1 = diff(x, t) == 3*x - 4*y
sage: ec2 = diff(y, t) == x - y
sage: desolve_system([ec1, ec2], [x, y])
[x(t) == 2*t*e^t*x(0) - 4*t*e^t*y(0) + e^t*x(0),
 y(t) == t*e^t*x(0) - 2*t*e^t*y(0) + e^t*y(0)]
```

Teniendo en cuenta que $C_1 = y(0)$ y $C_2 = x(0) + 2y(0)$, vemos que la solución obtenida es la misma. □

III. Autovalores complejos: $\lambda = a \pm bi$, $b > 0$. La solución general del sistema tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}\big(C_1(\alpha_1 \cos(bt) - \alpha_2 \operatorname{sen}(bt)) + C_2(\alpha_1 \operatorname{sen}(bt) + \alpha_2 \cos(bt))\big), \\ y(t) = e^{at}\big(C_1(\beta_1 \cos(bt) - \beta_2 \operatorname{sen}(bt)) + C_2(\beta_1 \operatorname{sen}(bt) + \beta_2 \cos(bt))\big), \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias y $(\alpha_1 + \alpha_2 i, \beta_1 + \beta_2 i)$ un autovector complejo asociado a $\lambda = a + bi$.

Ejemplo 4.10. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 4x + 5y, \end{cases}$$

cuyos autovalores son de la forma $\lambda = 3 \pm 2i$. Para buscar un autovector asociado a $3 + 2i$, consideramos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 - (3+2i) & -2 \\ 4 & 5 - (3+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 i \\ \beta_1 + \beta_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que, en componentes, es equivalente al sistema

$$\begin{cases} (\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2)i = 0, \\ (2\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2) + (2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_2)i = 0. \end{cases}$$

Igualando las partes reales e imaginarias a cero, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 = 0, \end{cases}$$

que pueden reducirse a dos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Tomando $\alpha_1 = 1$ y $\beta_1 = 1$, deducimos que $\alpha_2 = 2$ y $\beta_2 = -3$.

En Sage se obtiene el siguiente resultado:

```
sage: A = matrix([[1, -2], [4, 5]])
sage: A.eigenvectors_right()
[(3 - 2*I, [(1, -1 + 1*I)], 1), (3 + 2*I, [(1, -1 - 1*I)], 1)]
```

En resumen, las funciones

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t}\big(C_1(\cos(2t) - 2\,\mathrm{sen}(2t)) + C_2(\mathrm{sen}(2t) + 2\cos(2t))\big), \\ y(t) = e^{3t}\big(C_1(\cos(2t) + 3\,\mathrm{sen}(2t)) + C_2(\mathrm{sen}(2t) - 3\cos(2t))\big), \end{cases}$$

son las componentes de la solución general del sistema.

Calculemos la solución usando Sage directamente:

```
sage: var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: y = function('y', t)
sage: ec1 = diff(x, t) == x - 2*y
sage: ec2 = diff(y, t) == 4*x + 5*y
sage: desolve_system([ec1, ec2], [x, y])
[x(t) == -((x(0) + y(0))*sin(2*t) - cos(2*t)*x(0))*e^(3*t),
 y(t) == ((2*x(0) + y(0))*sin(2*t) + cos(2*t)*y(0))*e^(3*t)]
```

Podemos recuperar la solución obtenida anteriormente haciendo los cambios $x(0) = C_1 + 2C_2$, $y(0) = C_1 - 3C_2$. □

Observación. Tanto el método de variación de las constantes como el de coeficientes indeterminados pueden adaptarse para resolver sistemas lineales no homogéneos. □

Observación. El método de autovalores presentado en esta sección puede extenderse de forma natural para resolver sistemas lineales de orden arbitrario. □

4.4. Teoría geométrica: el diagrama de fases

Como sabemos, una solución particular de un sistema lineal de orden dos consta de dos funciones, $x(t)$ e $y(t)$. Nos planteamos en esta sección el problema de representar gráficamente dicha solución de la manera más adecuada posible. Este camino nos llevará a una interpretación de corte geométrico de la estructura de las soluciones del sistema.

Una primera idea consiste en representar por separado las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$. Sin embargo, con este tipo de representación no podemos reflejar de forma

clara la relación existente entre ambas variables. También podríamos plantearnos el considerar en el espacio $\mathbb{R}^3$ la curva formada por los puntos de la forma $(t, x(t), y(t))$. En este caso la dificultad estriba en la propia realización de la representación gráfica: en general no es sencillo dibujar curvas en el espacio.

Consideremos un punto arbitrario $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y sea $(x(t), y(t))$ la única solución del sistema que verifica las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. La curva en $\mathbb{R}^2$ formada por los puntos $(x(t), y(t))$ es la *órbita* o *trayectoria* del sistema asociada al punto (x_0, y_0). Es habitual referirse, en este contexto, a la variable t como el *tiempo*. De este modo, la órbita de un punto nos dice cómo varía su posición en $\mathbb{R}^2$ conforme el tiempo cambia. El sentido de avance de la órbita suele indicarse con una flecha sobre la curva.

Mediante las órbitas podemos representar la relación cualitativa existente entre las componentes de la solución. Para ello, expresaremos la relación entre las variables x e y, de forma explícita o implícita, mediante la eliminación del parámetro t. Obtendremos así una curva en el plano x-y sobre la cual estará situada la órbita correspondiente. Ilustremos este proceso mediante un par de ejemplos.

Ejemplo 4.11. La solución del sistema

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, viene dada por las funciones

$$\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = 2e^t. \end{cases}$$

Dicho de otra forma, la órbita que pasa por el punto $(1, 2)$ es la curva definida por $(e^t, 2e^t)$.

En este caso es fácil eliminar el parámetro t. Teniendo en cuenta que $e^t = x$, resulta

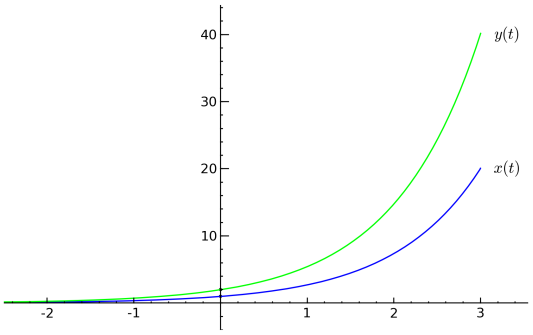
$$y = 2e^t = 2x \Rightarrow y = 2x.$$

La expresión obtenida nos dice que los puntos de la órbita $(e^t, 2e^t)$ están sobre la curva $y = 2x$, pero no que la órbita sea toda la curva. Notemos que $x = e^t > 0$ e $y = 2e^t > 0$, por lo que la órbita queda confinada en el primer cuadrante. Además,

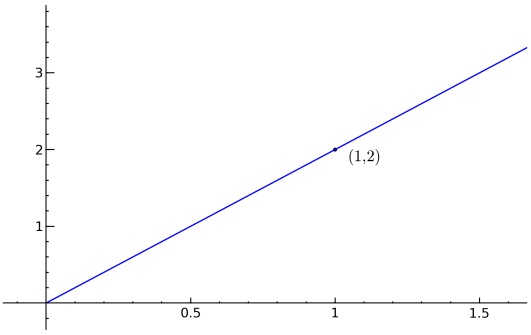
$$\lim_{t\infty}(x(t), y(t)) = (\infty, \infty),$$

lo que indica que la órbita tiende a infinito, en ambas variables, conforme el tiempo avanza. Asimismo,

$$\lim_{t \to -\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0),$$



Funciones $x(t) = e^t$, $y(t) = 2e^t$.



Órbita del punto $(1, 2)$.

Figura 4.2: Distintas formas de representar la solución del ejemplo 4.11.

lo que significa que la órbita tiende al origen cuando el tiempo retrocede (suele decirse que la órbita *sale* del origen). En la figura 4.2 se representan las funciones $x(t)$ e $y(t)$, así como la órbita correspondiente al punto $(1, 2)$.

En Sage podemos resolver el sistema y calcular los límites de la solución de la siguiente forma:

```
sage: t = var('t')
sage: x = function('x', t)
sage: y = function('y', t)
sage: ec1 = diff(x, t) == x
sage: ec2 = diff(y, t) == 2*x
sage: sol = desolve_system([ec1, ec2], [x, y], ics=[0, 1, 2]); sol
[x(t) == e^t, y(t) == 2*e^t]
sage: sol1 = sol[0].rhs()
sage: sol2 = sol[1].rhs()
sage: limit(sol1, t=oo), limit(sol2, t=oo)
(+Infinity, +Infinity)
sage: limit(sol1, t=-oo), limit(sol2, t=-oo)
(0, 0)
```

Para dibujar la órbita correspondiente, digamos para $t \in (-10, 1)$, podemos usar el comando `parametric_plot`:

```
sage: fig = parametric_plot((sol1, sol2), (t, -10, 1))
sage: show(fig)
```

El resultado obtenido puede verse en la figura 4.2. □

Ejemplo 4.12. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Su solución está definida por las funcio-

nes

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t), \\ y(t) = \operatorname{sen}(t). \end{cases}$$

De este modo, la curva definida por $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ es la órbita que pasa por el punto $(1,0)$.

Para eliminar el parámetro t, notemos que

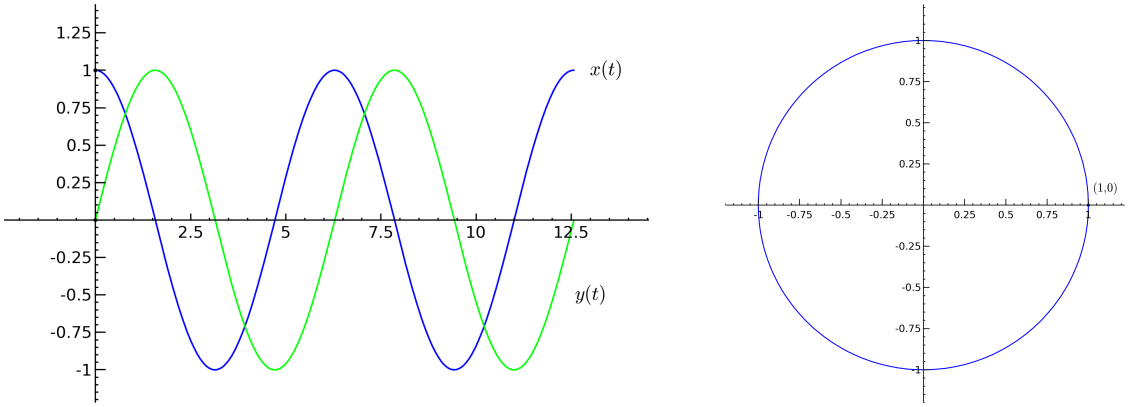
$$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1,$$

lo que indica que la órbita correspondiente está sobre la circunferencia de centro el origen y radio unidad. De hecho, al variar t en el intervalo $[0, 2\pi)$, recorremos todos los puntos de la circunferencia. En consecuencia, la órbita del punto $(1,0)$ es toda la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En este caso la órbita es *periódica*, con periodo 2π, ya que la solución $(x(t), y(t))$ toma el mismo valor en un punto t que en los puntos de la forma $t + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

En la figura 4.3 se representan los resultados obtenidos. □



Funciones $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$. Órbita del punto $(1,0)$.

Figura 4.3: Distintas formas de representar la solución del ejemplo 4.12.

No es difícil demostrar que dos órbitas distintas nunca pueden cortarse, debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones. De esta forma, el espacio $\mathbb{R}^2$, denominado *espacio de fases*, puede particionarse mediante órbitas: por cada punto pasa una única órbita y dos de éstas nunca se cortan. Dichas órbitas están orientadas según el sentido de avance del tiempo. El espacio de fases junto con la estructura dada por el conjunto de todas las órbitas orientadas se denomina *diagrama de fases* del sistema.

Observación. La teoría *cualitativa* o *geométrica* de ecuaciones diferenciales (que forma asimismo parte de la teoría de Sistemas Dinámicos) permite estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin necesidad de obtenerlas explícitamente. La herramienta básica de dicha teoría es el diagrama de fases, a través del cual podemos responder a cuestiones sobre el comportamiento de las soluciones a largo plazo, la estabilidad de las órbitas, la existencia de órbitas periódicas, etc. La teoría cualitativa para sistemas no lineales hace uso de herramientas matemáticas avanzadas que están fuera del alcance de este trabajo. □

Una clase especial de órbitas son los *puntos críticos* o de *equilibrio*, que corresponden a soluciones constantes del sistema, esto es, soluciones que verifican $x'(t) = y'(t) = 0$ para cualquier valor de t. Su representación gráfica se reduce a un punto en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.13. Calculemos los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Para ello, basta con igualar las derivadas a cero y resolver el sistema resultante:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0.$$

Por tanto, $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Su órbita se reduce al punto $(0,0)$, ya que la solución que parte del origen sería $x(t) = 0$, $y(t) = 0$. □

Ejemplo 4.14. El sistema

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x + y, \end{cases}$$

posee infinitos puntos críticos. En efecto, igualando las derivadas a cero nos queda la condición $x + y = 0$. Cualquier punto (x_0, y_0) que verifique $x_0 + y_0 = 0$ es un punto crítico. Tenemos pues toda una recta de puntos críticos: $y = -x$. □

Ejemplo 4.15. Consideremos una partícula de masa unidad que se desplaza sobre una recta, y denotemos por x su posición respecto de un sistema de referencia fijado. Supongamos que sobre la partícula actúa una fuerza que es función de la posición y la velocidad: $f(x, x')$. La segunda ley de Newton nos permite escribir la ecuación del movimiento: $x'' = f(x, x')$. Llamando $y = x'$ a la velocidad de la partícula, podemos escribir la ecuación diferencial como un sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x, y). \end{cases}$$

Los puntos críticos tienen la forma $(x_0, 0)$, donde x_0 debe ser solución de la ecuación $f(x_0, 0) = 0$. En tales puntos, tanto la velocidad x' como la aceleración $y' = x''$ son nulas, por lo que la partícula permanece en estado de equilibrio. □

Es claro que, dado un sistema lineal

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

el origen $(0,0)$ siempre es un punto crítico del mismo. Para que sea el único punto crítico, el sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

debe tener solución única, lo cual es cierto si y sólo si

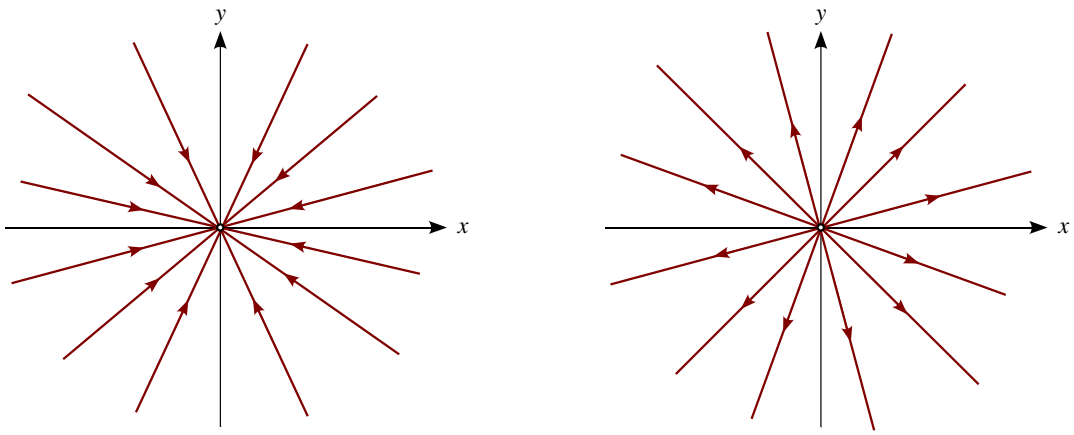
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Es decir, el origen es el único punto crítico del sistema si y sólo si $\det(A) \neq 0$. A partir de ahora supondremos que se verifica esta condición.

Para representar el diagrama de fases de un sistema tenemos que calcular su solución general y representar en el plano de fases un número adecuado de órbitas. Para sistemas lineales que verifican $\det(A) \neq 0$, el diagrama de fases sólo admite cuatro configuraciones básicas, en las cuales el origen es el único punto crítico presente. Las posibles configuraciones son:

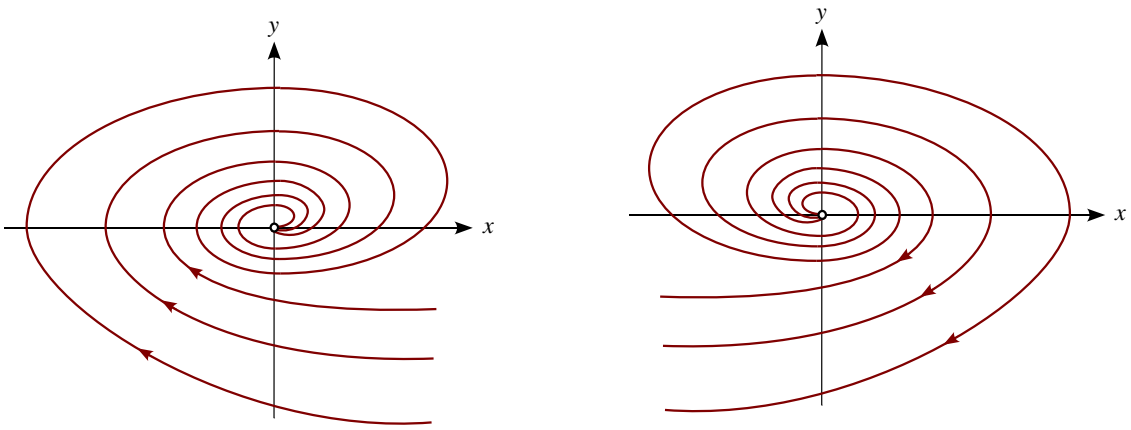
- *Nodo*. Todas las órbitas entran en el origen (nodo *estable*) o salen de éste (nodo *inestable*). Véase la figura 4.4.
- *Foco*. Ahora las órbitas tienden o parten del origen (foco *estable* o *inestable*, respectivamente), pero dando infinitas vueltas alrededor del mismo. Gráficamente, las órbitas tienen forma de espirales, que pueden girar en el sentido de las agujas del reloj o al contrario. Véase la figura 4.5.
- *Punto de silla*. En este caso hay dos órbitas que tienden al origen (formando con éste la denominada *variedad estable*), otras dos que salen del origen (formando la *variedad inestable*) y el resto de órbitas tienden de forma asintótica a las anteriores. Véase la figura 4.6.
- *Centro*. El diagrama de fases consta de curvas cerradas concéntricas alrededor del origen. Véase la figura 4.6.

Observación. La idea intuitiva del concepto de estabilidad es muy sencilla. Un punto crítico es estable si las órbitas de los puntos cercanos al punto crítico permanecen cerca de éste conforme el tiempo avanza. Además, si dichas órbitas convergen cuando $t \to \infty$ al punto crítico, se dice que éste es *asintóticamente estable*. De hecho, los nodos



Nodo estable Nodo inestable

Figura 4.4: Diagrama de fases alrededor del origen $(0,0)$: nodos.

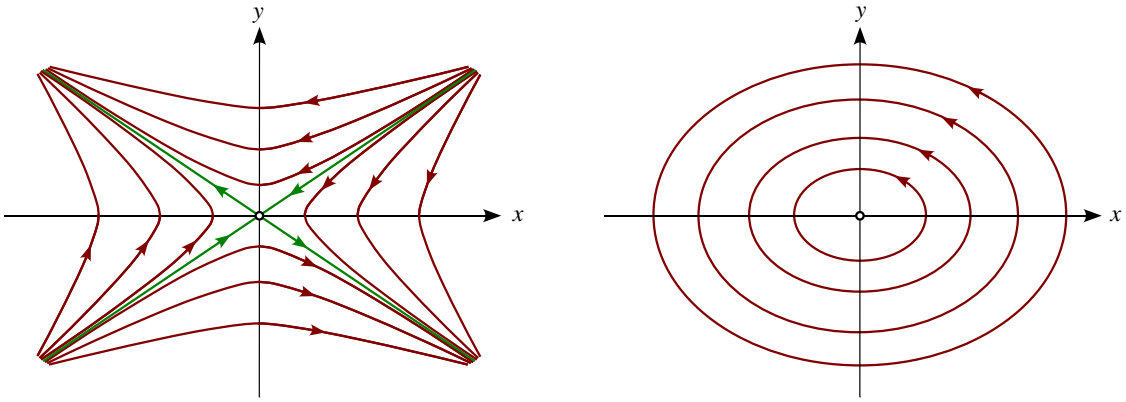


Foco estable Foco inestable

Figura 4.5: Diagrama de fases alrededor del origen $(0,0)$: focos.

y focos estables son asintóticamente estables, mientras que un centro es estable pero no asintóticamente estable. Cuando falla la condición de estabilidad, se dice que el punto crítico es *inestable*; por ejemplo, un punto de silla. □

A continuación veremos, mediante diversos ejemplos, cómo aparecen los distintos tipos de diagramas de fases.



Punto de silla Centro

Figura 4.6: Diagrama de fases alrededor del origen $(0,0)$: punto de silla y centro.

Ejemplo 4.16. Dibujemos el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

En primer lugar, notemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

por lo que $(0,0)$ es el único punto crítico.

La solución general del sistema es de la forma

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \end{cases}$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias. El punto crítico $(0,0)$ se obtiene para los valores $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. A continuación analizaremos cómo son las demás órbitas, en función de los valores de las constantes C_1 y C_2.

Supongamos $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$; en tal caso, $x = 0$ e $y = C_2 e^{2t}$. Si $C_2 > 0$ se tiene que $y > 0$; además, $y \to \infty$ cuando $t \to \infty$, mientras que $y \to 0$ si $t \to -\infty$. La órbita correspondiente consiste en el semieje y positivo, orientado en el sentido creciente de y. De forma análoga, la órbita correspondiente a $C_2 < 0$ consiste en el semieje y negativo, orientado en el sentido decreciente de y. Gráficamente, en ambos casos la órbita "sale" del origen.

Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$, tenemos $x = C_1 e^t$ e $y = C_2 e^t$, por lo que $y = x$; esto indica que las órbitas correspondientes estarán sobre la recta $y = x$. Para $C_1 > 0$ se tiene que $x = y > 0$, por lo que la órbita estará en el primer cuadrante. Se verifica que $x = y \to \infty$ si $t \to \infty$, mientras que $x = y \to 0$ cuando $t \to -\infty$. La órbita obtenida es la semirrecta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, orientada en sentido creciente (hacia el noreste). Para $C_1 < 0$ se obtiene la semirrecta $y = x$ en el cuarto cuadrante, orientada en sentido decreciente (hacia el suroeste).

Supongamos ahora que $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$. Teniendo en cuenta que $x = C_1 e^t$, podemos escribir

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} = C_1 e^t + \frac{C_2}{C_1^2}(C_1 e^t)^2 = x + \frac{C_2}{C_1^2} x^2.$$

Por tanto, las órbitas estarán sobre parábolas de la forma $y = x + Cx^2$, con $C \neq 0$ constante. Cada una de estas parábolas pasa por $(0,0)$, y es claro que $x \to 0$ e $y \to 0$ cuando $t \to -\infty$, por lo que todas las órbitas salen del origen. Cada parábola consta pues de tres órbitas: el punto crítico $(0,0)$ y los dos trozos de parábola restantes, que salen del origen.

La configuración del diagrama de fases obtenida corresponde a un nodo inestable, que se representa en la figura 4.7. □

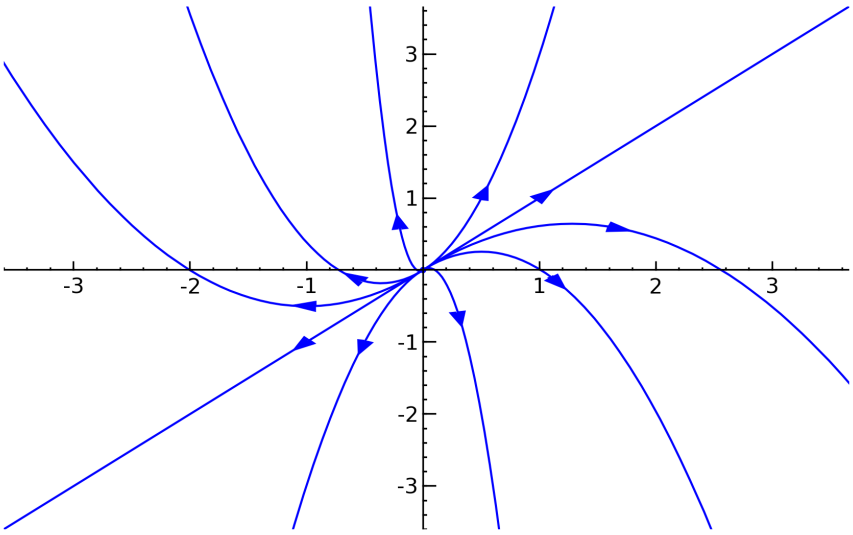


Figura 4.7: Nodo inestable del ejemplo 4.16.

Ejemplo 4.17. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

El origen es el único punto crítico, ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

La solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t)), \\ y(t) = e^{-t}(C_1 \operatorname{sen}(t) - C_2 \cos(t)). \end{cases}$$

La solución correspondiente a $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$ viene dada por la curva de componentes $x(t) = C_2 e^{-t} \operatorname{sen}(t)$ e $y(t) = -C_2 e^{-t} \cos(t)$, cuya representación gráfica es una espiral que da infinitas vueltas alrededor del origen[1]. Por otra parte, $x(t)$ e $y(t)$ tienden a 0 cuando $t \to \infty$, por lo que las órbitas entran en el origen. Los restantes casos se tratan de manera análoga.

Hemos visto que todas las órbitas son espirales que entran en el origen, por lo que el diagrama de fases correspondiente es un foco estable: véase la figura 4.8. □

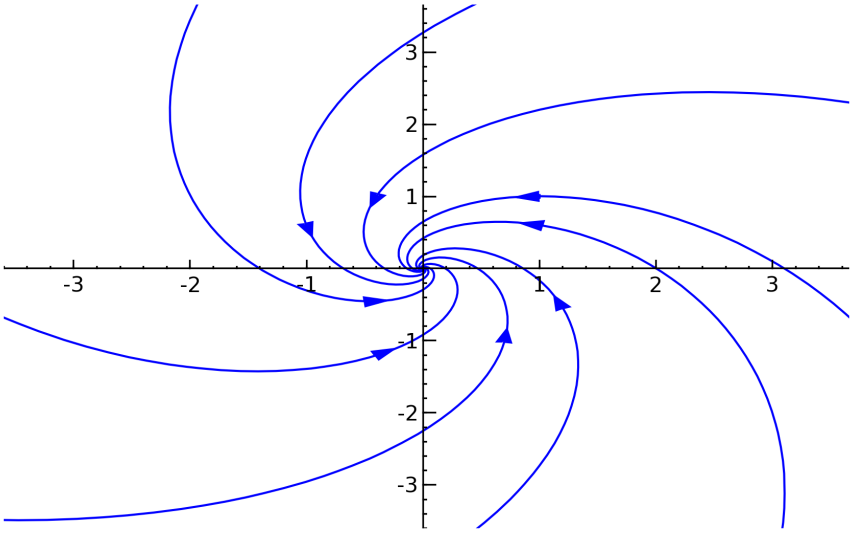


Figura 4.8: Foco estable del ejemplo 4.17.

[1]Podemos dar una idea intuitiva del porqué. Para ello, elevemos $x(t)$ e $y(t)$ al cuadrado y sumemos:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = C_2^2 e^{-2t}(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)) = C_2^2 e^{-2t}.$$

Para cada valor de t, el punto $(x(t), y(t))$ está sobre la circunferencia de centro el origen y radio $|C_2|e^{-t}$. Al ir variando el ángulo de giro t el radio va decreciendo, por lo que los puntos $(x(t), y(t))$ van describiendo una espiral que tiende al origen. El número de vueltas que da la espiral es infinito, ya que el ángulo t recorre todos los intervalos de la forma $[k, 2\pi + k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.18. Un ejemplo de punto de silla nos lo proporciona el diagrama de fases del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Se verifica que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

por lo que el origen es el único punto crítico. La solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y(t) = -3C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

Para $C_1 = 0$, tenemos que $x = C_2 e^{2t}$ e $y = 0$. Determinamos así la variedad inestable, que está formada por el semieje x positivo (orientado hacia la derecha; corresponde a $C_2 > 0$) y el semieje x negativo (orientado hacia la izquierda; corresponde a $C_2 < 0$), separados por el punto crítico $(0, 0)$.

Al considerar $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$, resulta que $x = C_1 e^{-t}$ e $y = -3C_1 e^{-t}$, de donde $y = -3x$. El origen divide a esta recta en dos órbitas que tienden al punto crítico. La recta $y = -3x$ forma la variedad estable.

Supongamos ahora $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$. De $y = -3C_1 e^{-t}$ podemos despejar $e^{-t} = -\dfrac{y}{3C_1}$; por tanto,

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = C_1 \left(-\frac{y}{3C_1} \right) + C_2 \left(-\frac{3C_1}{y} \right)^2 = -\frac{y}{3} + \frac{9C_1^2 C_2}{y^2}.$$

En consecuencia, las órbitas corresponden a las ramas de las curvas definidas por la ecuación

$$x = -\frac{y}{3} + \frac{C}{y^2}, \quad C \neq 0.$$

Su sentido viene determinado por el sentido de las órbitas que forman las variedades estable e inestable.

En la figura 4.9 se representa el esquema de fases correspondiente. □

Ejemplo 4.19. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = x. \end{cases}$$

En primer lugar, comprobemos que el origen es el único punto crítico:

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

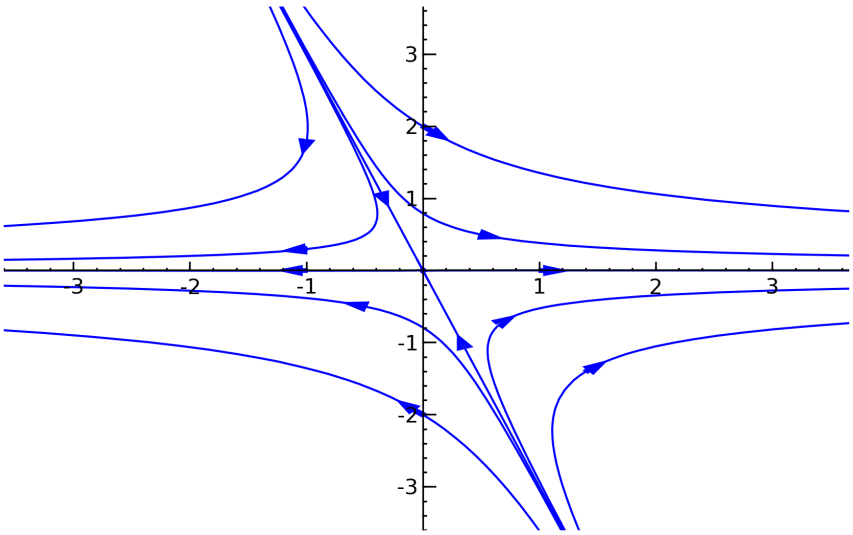


Figura 4.9: Punto de silla del ejemplo 4.18.

La solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t), \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(C_1 \operatorname{sen}(2t) - C_2 \cos(2t)). \end{cases}$$

Notemos que

$$x^2 + 4y^2 = (C_1^2 + C_2^2)(\cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t)) = C_1^2 + C_2^2 \equiv C^2,$$

lo que significa que cada órbita distinta del origen está sobre una elipse de ecuación

$$x^2 + 4y^2 = C^2,$$

para una cierta constante arbitraria $C \neq 0$. Como ninguna elipse contiene al punto crítico, resulta que cada elipse es una órbita completa. Este tipo de órbita se denomina *cerrada* o *periódica*.

Veamos a continuación cómo determinar el sentido de giro de las órbitas. Supongamos que $x > 0$ e $y > 0$ (esto es, estamos en el primer cuadrante); a partir de las ecuaciones, deducimos que $x' = -4y < 0$ e $y' = x > 0$, lo que significa que x decrece mientras que y crece. Por tanto, las órbitas deben girar en el sentido contrario a las agujas del reloj.

El diagrama de fases resultante es un centro, que se representa en la figura 4.10. □

La estructura del diagrama de fases de un sistema lineal que verifica $\det(A) \neq 0$ queda perfectamente determinada a partir de las raíces del polinomio característico

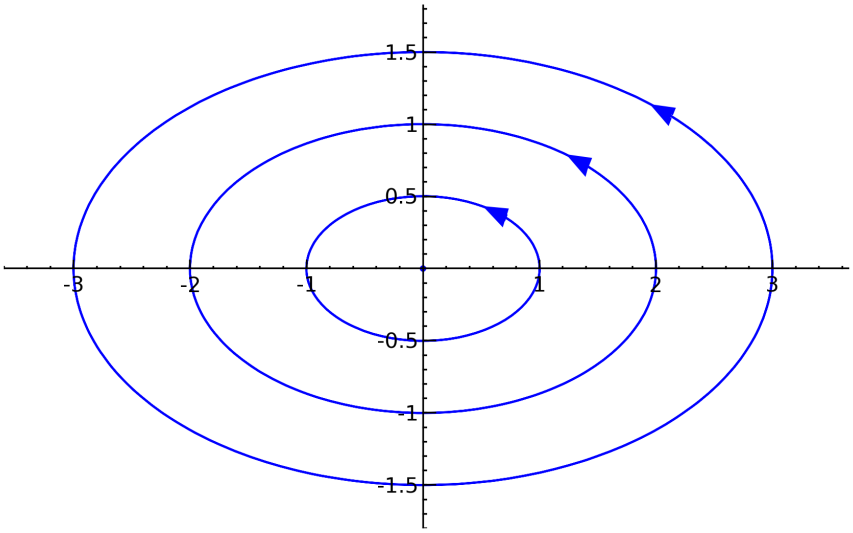


Figura 4.10: Centro del ejemplo 4.19.

asociado,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Los posibles casos son los siguientes:

I. Raíces reales del mismo signo: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$. El diagrama de fases resultante es:

- Un *nodo estable* si las raíces son negativas: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.
- Un *nodo inestable* si las raíces son positivas: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

II. Raíces reales con signos opuestos: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$. El diagrama de fases es un punto de silla.

III. Raíces complejas no imaginarias puras: $\lambda = a \pm bi$, $a \neq 0$. Obtenemos:

- Un *foco estable* si la parte real es negativa: $a < 0$.
- Un *foco inestable* si la parte real es positiva: $a > 0$.

IV. Raíces complejas imaginarias puras: $\lambda = \pm bi$, $b \neq 0$. El diagrama de fases correspondiente es un centro.

Ejemplo 4.20. Retomemos los ejemplos estudiados anteriormente para determinar la configuración del diagrama de fases de forma directa.

- El sistema
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -x + 2y, \end{cases}$$
tiene como polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Al ser reales y del mismo signo, el diagrama de fases es un nodo; al ser positivas, el nodo es inestable.

- El polinomio característico del sistema
$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$
es $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$. Sus raíces son $\lambda = -1 \pm i$, por lo que el diagrama de fases es un foco. Como la parte real de las raíces es negativa, el foco es estable.

- El sistema
$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -y, \end{cases}$$
tiene a $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ como polinomio característico. El diagrama de fases correspondiente es un punto de silla, ya que las raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ son reales y de distinto signo.

- Por último, el polinomio característico del sistema
$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$
es $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Sus raíces son imaginarias puras: $\lambda = \pm i$, por lo que el diagrama de fases es un centro.

Los resultados son consistentes con los obtenidos en los ejemplos 4.16–4.19. □

Notemos que las raíces del polinomio característico nos proporcionan información *cualitativa* sobre el diagrama de fases, es decir, nos dice cuál es la estructura general del diagrama pero sin precisar la forma exacta de sus órbitas. Para obtener esto último, tendríamos que resolver el sistema y dibujar las órbitas a partir de su expresión explícita, tal y como hicimos en los ejemplos 4.16–4.19.

Consideramos a continuación un ejemplo en el que se analiza el diagrama de fases de un sistema que no verifica la condición $\det(A) \neq 0$.

Ejemplo 4.21. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x. \end{cases}$$

En este caso, la matriz de coeficientes tiene determinante nulo. Los puntos críticos son de la forma $(0, y_0)$, con $y_0 \in \mathbb{R}$; esto es, el eje y está compuesto de puntos críticos.

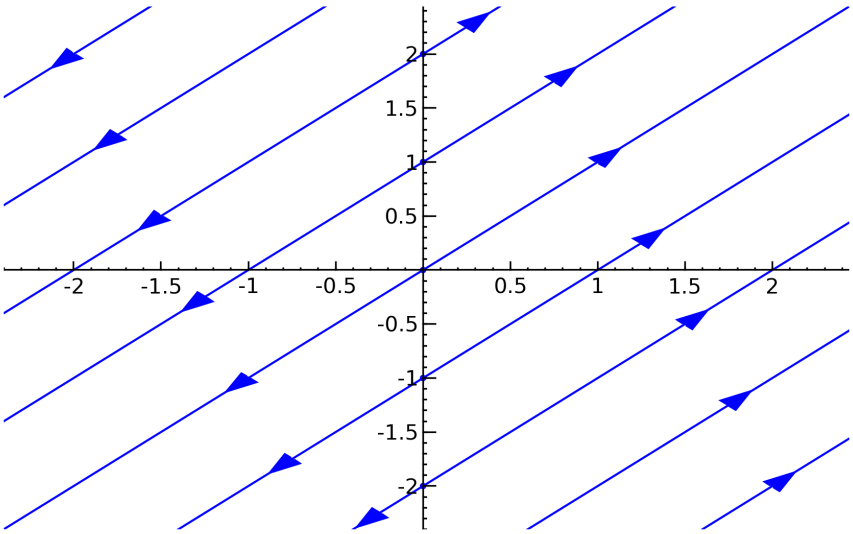


Figura 4.11: Diagrama de fases del ejemplo 4.21.

Para determinar la solución general, resolvemos la primera ecuación de forma directa:

$$x' = x \Rightarrow x(t) = C_1 e^t,$$

y a continuación integramos en la segunda:

$$y' = x \Rightarrow y(t) = \int x(t)dt = \int C_1 e^t dt = C_1 e^t + C_2.$$

Por tanto, resulta que la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2. \end{cases}$$

Observemos que para $C_1 = 0$ se obtiene la recta de puntos críticos $x = 0$. Para $C_1 \neq 0$ es claro que $y = x + C_2$, por lo que las órbitas correspondientes serán rectas de pendiente 1. Notemos que, independientemente del signo de C_1, las órbitas se alejan del eje x cuando $t \to \infty$. La estructura del diagrama de fases puede apreciarse en la figura 4.11. □

4.5. Aplicaciones

4.5.1. Calentamiento de edificios

En la sección 2.7.3 estudiamos un modelo de calentamiento de edificios en el que se suponía que la temperatura estaba uniformemente distribuida en el interior del edificio. Dicho modelo es apropiado para estudiar el caso de un edificio con un único compartimento.

En esta sección vamos a considerar un modo algo más preciso de representar aquel modelo, a saber:

$$\begin{cases} T'(t) = -\dfrac{T(t) - T_e(t)}{K} + C\big(H(t) + U(t, T(t))\big), \quad t \in [0, t^*], \\ T(0) = T_0, \end{cases}$$

donde $T(t)$ (en °C) denota la temperatura en el interior del edificio y $T_e(t)$ es la temperatura en el exterior; la constante positiva K (en horas, h) es la constante de tiempo de transferencia de calor, que depende de la calidad del aislamiento; C (en °C/kcal) es la capacidad calorífica del edificio, que depende de su tamaño; $H(t)$ (en kcal/h) representa el calor generado por personas, luces, etc., en el interior del edificio; y $U(t, T(t))$ (en kcal/h) denota los efectos del sistema de calefacción o de aire acondicionado, que dependen tanto del tiempo t como de la temperatura en cada instante $T(t)$; por último, t^* es el tiempo final y T_0 denota la temperatura inicial del edificio.

Vamos a considerar ahora un edificio con varios compartimentos, cada uno de los cuales puede tener una temperatura diferente a la del resto. Por simplicidad, analizaremos un modelo con dos compartimentos (figura 4.12), aunque la idea puede extenderse para un número arbitrario de ellos.

Denotemos por $T_i(t)$, $H_i(t)$ y $U_i(t, T(t))$ la temperatura, fuentes de calor y fuentes de calefacción/refrigeración, respectivamente, del compartimento $i = 1, 2$. Sean C_1 y C_2 las constantes de capacidad calorífica de los compartimentos. K_i es la constante de tiempo de transferencia de calor correspondiente a las paredes que limitan el compartimento i-ésimo con el exterior. Asimismo, es necesario introducir las constantes de tiempo de transferencia de calor entre ambos compartimentos, K_{12} y K_{21}; dichos valores deben verificar la relación $C_1 K_{12} = C_2 K_{21}$.

El sistema de ecuaciones diferenciales a considerar es el siguiente:

$$\begin{cases} T_1'(t) = -\dfrac{T_1(t) - T_e(t)}{K_1} + C_1\big(H_1(t) + U_1(t, T_1(t))\big) - \dfrac{1}{K_{12}}(T_1(t) - T_2(t)), \\ T_2'(t) = -\dfrac{T_2(t) - T_e(t)}{K_2} + C_2\big(H_2(t) + U_2(t, T_2(t))\big) - \dfrac{1}{K_{21}}(T_2(t) - T_1(t)), \end{cases}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} T_1(0) = T_{1,0}, \\ T_2(0) = T_{2,0}, \end{cases}$$

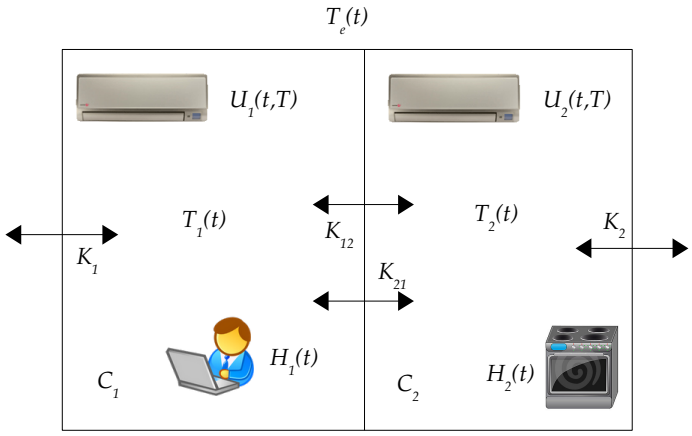


Figura 4.12: Edificio con dos compartimentos.

siendo $T_{i,0}$ la temperatura inicial en el compartimento $i = 1, 2$.

Observación. El término extra que aparece en la primera ecuación, $-\frac{1}{K_{12}}(T_1(t) - T_2(t))$, proviene de la ley del enfriamiento de Newton, y representa la pérdida (si $T_1(t) > T_2(t)$) o ganancia (si $T_1(t) < T_2(t)$) de calor en el primer compartimento a través de la pared que lo separa del segundo compartimento. Un término análogo aparece en la segunda ecuación. □

Ejemplo 4.22. Consideremos un edificio dividido en dos zonas, A y B. La zona A, cuya capacidad calorífica es de $5{,}5 \cdot 10^{-4}$ °C/kcal, se calienta mediante una estufa que proporciona $2 \cdot 10^4$ kcal/h. La constante de tiempo para la transferencia de calor entre la zona A y el exterior es de 4 horas, entre la zona B y el exterior es de 5 horas, y entre las dos zonas es de 2 horas. Si la temperatura exterior es de 0 °C, vamos a determinar la temperatura mínima que se alcanza en la zona B al cabo de 4 horas, suponiendo que las temperatura inicial en la zona A es de 10 °C y en la zona B de 12 °C.

Según el enunciado del problema, se tiene que $T_e = 0$, $K_1 = 4$, $K_2 = 5$, $K_{12} = K_{21} = 2$ y $C_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$; C_2 puede calcularse a partir de la relación $C_1 K_{12} = C_2 K_{21}$, aunque no será necesario. Por otra parte, tenemos que $H_1 \equiv H_2 \equiv 0$, ya que no consideramos el calor generado por personas o maquinaria en el interior del edificio. Por último, $U_2 \equiv 0$ ya que no hay calefacción en la zona B, y

$$C_1 U_1 = \left(5{,}5 \cdot 10^{-4} \, \frac{^\circ\mathrm{C}}{\cancel{\text{kcal}}}\right) \cdot \left(2 \cdot 10^4 \, \frac{\cancel{\text{kcal}}}{\text{h}}\right) = 11 \, ^\circ\mathrm{C/h}$$

para la zona A. El sistema de ecuaciones diferenciales queda pues de la siguiente

forma:

$$\begin{cases} T_1' = -\frac{1}{4}T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2) + 11, \\ T_2' = -\frac{1}{5}T_2 - \frac{1}{2}(T_2 - T_1), \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} T_1' = -\frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{2}T_2 + 11, \\ T_2' = \frac{1}{2}T_1 - \frac{7}{10}T_2. \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema mediante el método de sustitución. Derivamos en la segunda ecuación:

$$T_2'' = \frac{1}{2}T_1' - \frac{7}{10}T_2',$$

y sustituimos T_1' usando la primera ecuación:

$$T_2'' = \frac{1}{2}\big(-\frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{2}T_2 + 11\big) - \frac{7}{10}T_2'.$$

Despejando T_1 de la segunda ecuación y sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$T_2'' + \frac{29}{20}T_2' + \frac{11}{40}T_2 = \frac{11}{2}.$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = \frac{-29+\sqrt{401}}{40}$ y $\lambda_2 = \frac{-29-\sqrt{401}}{40}$. Tras aplicar el método de variación de las constantes, llegamos a que la solución general de la ecuación de segundo orden es

$$T_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{R}{\lambda_1 \lambda_2},$$

donde $R = \frac{11}{2}$ es el término independiente. Por último, a partir de la segunda ecuación podemos calcular T_1:

$$T_1(t) = C_1(2\lambda_1 + \tfrac{7}{5})e^{\lambda_1 t} + C_2(2\lambda_2 + \tfrac{7}{5})e^{\lambda_2 t} + \frac{7R}{5\lambda_1\lambda_2}.$$

Las condiciones iniciales del problema son $T_1(0) = 10$ y $T_2(0) = 12$, lo que da lugar a los valores

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(-\tfrac{17}{5} - 12\lambda_2 + \frac{R}{\lambda_1}\right), \quad C_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\tfrac{17}{5} - 12\lambda_1 + \frac{R}{\lambda_2}\right).$$

En la figura 4.13 se representa la evolución de las temperaturas en las zonas A y B durante cuatro horas. Como puede observarse, la temperatura en la zona A aumenta de forma continua hasta alcanzar una temperatura máxima de $T_1(4) \approx 22{,}8$ °C. En cambio, la temperatura en la zona B comienza disminuyendo y luego tiende a aumentar hasta alcanzar una temperatura máxima de $T_2(4) \approx 14{,}7$ °C. Si queremos calcular la temperatura mínima en la zona B, podemos usar la derivada de T_2:

$$T_2'(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\ln\left(-\frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1 C_1}\right) \approx 0{,}76.$$

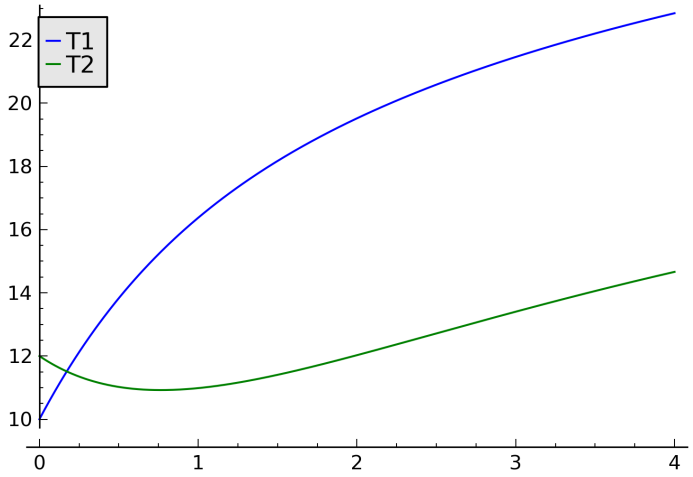


Figura 4.13: Temperaturas en las zonas A y B.

En dicho instante se alcanza la temperatura mínima: $T_2(0{,}76) \approx 10{,}92$ °C.

Vamos a resolver el problema usando Sage. En primer lugar, obtenemos la solución del sistema y la dibujamos:

```
sage: t = var('t')
sage: T1 = function('T1', t)
sage: T2 = function('T2', t)
sage: ec1 = diff(T1,t) + 3/4*T1 - 1/2*T2 - 11 == 0
sage: ec2 = diff(T2,t) - 1/2*T1 + (1/5+1/2)*T2 == 0
sage: [sol1, sol2] = desolve_system([ec1, ec2], [T1, T2],
      ics=[0, 10, 12])
sage: sol1 = sol1.rhs()
sage: sol2 = sol2.rhs()
sage: fig1 = plot(sol1, 0, 4, color = 'blue', legend_label='T1')
sage: fig2 = plot(sol2, 0, 4, color = 'green', legend_label='T2')
sage: show(fig1 + fig2)
```

El resultado puede verse en la figura 4.13. A continuación, calculamos la temperatura máxima en la zona A y el instante en que se alcanza:

```
sage: sol1.find_maximum_on_interval(0, 4)
(22.846076301719574, 3.9999998801867243)
```

así como la temperatura mínima en la zona B y su instante correspondiente:

```
sage: sol1.find_maximum_on_interval(0, 4)
(10.92326505335898, 0.76403288092266153)
```

□

4.5.2. Más sobre vibraciones mecánicas

En la sección 3.9.1 estudiamos el comportamiento de un móvil de masa m_1 sujeto por un muelle de constante elástica k_1 a una pared. Supongamos ahora que a dicho

móvil se le une otro móvil de masa m_2 mediante un muelle de constante k_2. Llamemos $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, a los desplazamientos de los móviles respecto de sus posiciones de equilibrio, 0_1 y 0_2. En la figura 4.14 se esquematiza el planteamiento del problema. Supondremos que sobre el sistema no actúa ninguna otra fuerza.

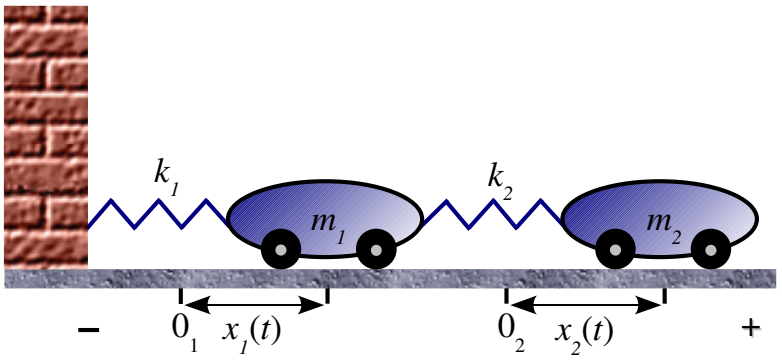


Figura 4.14: Vibraciones mecánicas: planteamiento del sistema.

La fuerza que ejerce un muelle sobre un móvil es proporcional a la elongación del muelle y opuesta al movimiento (ley de Hooke). Así pues, las fuerzas ejercidas por los muelles sobre el móvil de masa m_1 son de la forma $-k_1x_1$ y $k_2(x_2 - x_1)$. Asimismo, sobre el muelle de masa m_2 se ejerce una fuerza de la forma $-k_2(x_2 - x_1)$.

A partir de la segunda ley de Newton podemos deducir las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1), \end{cases}$$

que pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2x_2'' = k_2x_1 - k_2x_2. \end{cases}$$

Para plantear un problema de Cauchy, es necesario fijar las posiciones y velocidades iniciales de ambos móviles:

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_1'(0) = v_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad x_2'(0) = v_2.$$

Las ecuaciones del movimiento forman un sistema de dos ecuaciones de segundo orden. Para pasar a una sóla ecuación diferencial, comenzamos derivando dos veces la primera ecuación

$$m_1x_1^{(4)} = -(k_1 + k_2)x_1'' + k_2x_2'',$$

y sustituimos x_2'' usando la segunda ecuación:

$$m_1 x_1^{(4)} = -(k_1 + k_2)x_1'' + \frac{k_2^2}{m_2}x_1 - \frac{k_2^2}{m_2}x_2.$$

A continuación, despejamos x_2 de la primera ecuación

$$x_2 = \frac{m_1}{k_2}x_1'' + \frac{k_1 + k_2}{k_2}x_1, \tag{4.1}$$

y sustituimos en la expresión anterior:

$$m_1 x_1^{(4)} = -(k_1 + k_2)x_1'' + \frac{k_2^2}{m_2}x_1 - \frac{k_2^2}{m_2}\left(\frac{m_1}{k_2}x_1'' + \frac{k_1 + k_2}{k_2}x_1\right).$$

Por último, pasamos todos los términos al primer miembro y simplificamos:

$$m_1 x_1^{(4)} + \left(k_1 + k_2 + \frac{k_2 m_1}{m_2}\right)x_1'' + \frac{k_1 k_2}{m_2}x_1 = 0.$$

Esta ecuación de cuarto orden determina el movimiento del móvil de masa m_1. Una vez calculada la solución x_1, usamos la relación (4.1) para determinar el comportamiento del móvil de masa m_2.

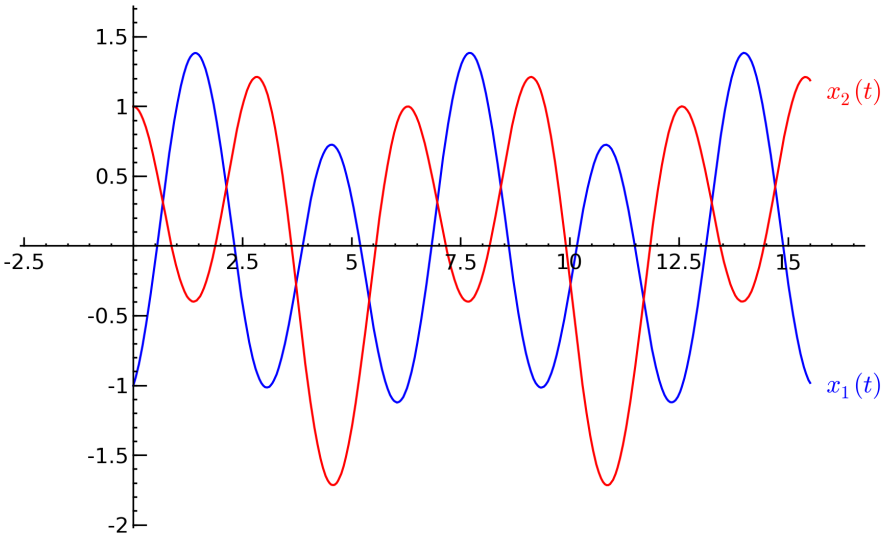


Figura 4.15: Gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Consideremos un caso particular: supongamos que los valores de las constantes son $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$ y $k_2 = 2$, sin preocuparnos del sistema de unidades utilizado. En tal caso, la ecuación de cuarto orden sería

$$2x_1^{(4)} + 10x_1'' + 8x_1 = 0 \Rightarrow x_1^{(4)} + 5x_1'' + 4x_1 = 0.$$

La correspondiente ecuación característica es

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0.$$

Haciendo el cambio $\mu = \lambda^2$ obtenemos una ecuación polinomial de segundo orden, que podemos resolver fácilmente:

$$\mu^2 + 5\mu + 4 = 0 \Rightarrow \mu = -1,\ \mu = -4.$$

Deshaciendo el cambio, resulta

$$\mu = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i, \quad \mu = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Por tanto, la solución general para x_1 es

$$x_1(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t) + C_3 \cos(2t) + C_4 \operatorname{sen}(2t).$$

Usando (4.1), determinamos la solución general para x_2:

$$x_2(t) = 2C_1 \cos(t) + 2C_2 \operatorname{sen}(t) - C_3 \cos(2t) - C_4 \operatorname{sen}(2t).$$

Supongamos ahora que tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = -1, \quad x_1'(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = 0.$$

Es decir, el primer móvil se desplaza una unidad hacia la izquierda y el segundo una unidad hacia la derecha respecto de sus posiciones de equilibrio; además, al primer móvil se le imprime una velocidad inicial positiva de módulo uno, mientras que el segundo se suelta sin velocidad inicial. La imposición de las condiciones iniciales conduce a

$$\left.\begin{array}{r} C_1 + C_3 = -1 \\ C_2 + 2C_4 = 1 \\ 2C_1 - C_3 = 1 \\ C_2 - C_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = \tfrac{1}{3},\ C_3 = -1,\ C_4 = \tfrac{1}{3}.$$

Por tanto, se obtienen las soluciones

$$x_1(t) = \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}(t) - \cos(2t) + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}(2t), \quad x_2(t) = \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}(t) + \cos(2t) - \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}(2t),$$

que se representan en la figura 4.15.

La solución obtenida representa un movimiento periódico de ambos móviles alrededor de sus respectivas posiciones de equilibrio.

4.5.3. El péndulo amortiguado

Consideremos un péndulo de longitud L y masa m, y llamemos $x(t)$ al ángulo que forma el péndulo con la vertical en el instante t (véase la figura 4.16); supondremos que el origen se halla en la posición de equilibrio del péndulo. La ecuación del movimiento puede deducirse a partir de la segunda ley de Newton, y tiene la siguiente expresión:

$$x'' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) = 0,$$

siendo g la constante gravitatoria. Introduzcamos una fuerza de amortiguación o rozamiento proporcional a la velocidad del péndulo. En tal caso, la ecuación del movimiento es

$$x'' + \frac{a}{m}x' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) = 0,$$

siendo $a > 0$ la constante de rozamiento. Introduciendo la variable $y = x'$ (velocidad), la ecuación anterior puede escribirse como un sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{g}{L}\operatorname{sen}(x) - \dfrac{a}{m}y. \end{cases}$$

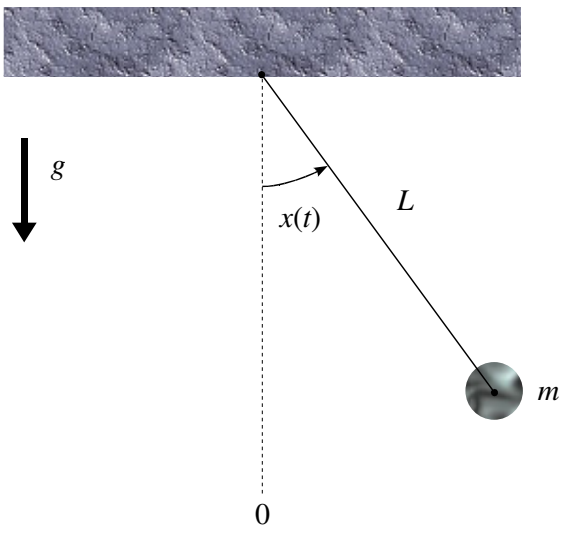


Figura 4.16: Sistema de referencia del problema del péndulo.

Es bien sabido que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

lo que significa que, para valores de x cercanos a 0, $\operatorname{sen}(x)$ puede aproximarse por x. Podemos entonces considerar la siguiente aproximación del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{g}{L}x - \dfrac{a}{m}y. \end{cases}$$

Se trata de un sistema lineal que representa el movimiento del péndulo para pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio.

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & -a/m \end{vmatrix} = \frac{g}{L} \neq 0,$$

por lo que el origen es el único punto crítico. Para determinar la configuración del diagrama de fases, consideremos la ecuación característica

$$\lambda^2 + \frac{a}{m}\lambda + \frac{g}{L} = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda = -\frac{a}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{m^2} - 4\frac{g}{L}}.$$

Hemos de distinguir pues tres casos:

- $\dfrac{a^2}{m^2} > 4\dfrac{g}{L}$. En tal caso las raíces son reales, distintas y negativas, por lo que se obtiene un nodo estable.
- $\dfrac{a^2}{m^2} = 4\dfrac{g}{L}$. Se tiene una raíz real doble negativa, por lo que el diagrama de fases es un nodo estable.
- $\dfrac{a^2}{m^2} < 4\dfrac{g}{L}$. Ahora las raíces son complejas con parte real negativa, por lo que tenemos un foco estable.

En cualquiera de los casos, el origen es un punto crítico estable. Este hecho puede interpretarse del siguiente modo: si el péndulo se encuentra inicialmente en equilibrio y se perturba ligeramente su posición o su velocidad, el movimiento resultante se extinguirá con el paso del tiempo.

En el caso en que no haya rozamiento ($a = 0$), las raíces del polinomio característico son de la forma

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-4\frac{g}{L}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Al ser imaginarias puras, la configuración del diagrama de fases corresponde a un centro. Su interpretación en términos físicos corresponde a un movimiento oscilatorio perpetuo alrededor de la posición de equilibrio.

CAPÍTULO

5

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores hemos estudiado diversas técnicas para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dichas técnicas son sólo aplicables a determinados tipos de ecuaciones: homogéneas, lineales, exactas, etc. Sin embargo, la mayoría de ecuaciones que aparecen en problemas científicos y técnicos no pueden resolverse de forma exacta. Además, en determinados casos puede ocurrir que la complejidad de la solución exacta sea tal, que aun pudiéndose calcular de forma explícita no seamos capaces de interpretarla adecuadamente.

En los casos en que no sea posible resolver de forma exacta una ecuación diferencial, podemos plantearnos la obtención de una aproximación suficientemente buena de la solución. Esta solución, denominada *solución numérica*, se determina mediante un método o algoritmo numérico que se ejecutará con la ayuda de un ordenador. Este es el camino habitual que se sigue en las aplicaciones científicas y técnicas, donde surgen ecuaciones no lineales de difícil o imposible resolución analítica.

En este capítulo vamos a presentar una serie de técnicas para la obtención de soluciones numéricas de problemas de valor inicial (los problemas de contorno se tratarán en el capítulo 6) que pueden aplicarse tanto a ecuaciones escalares como a sistemas de ecuaciones. Dichas técnicas forman parte de una de las ramas de las

Matemáticas conocida como Análisis Numérico.

Nos centraremos en el estudio de un problema de valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Supondremos que la función $f(x, y)$ verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad (véase la sección 2.6), por lo que el problema de valor inicial posee una ÍJnica solución.

Consideremos una *discretización* o *mallado* del intervalo $[a, b]$, esto es, una partición del mismo de la forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Por simplicidad, supondremos que el mallado es *uniforme*: la longitud de cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, N-1$, es igual a un cierto valor $h > 0$ fijo. De esta forma, se verifica la siguiente relación:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

El valor h se denomina *paso de malla* y los puntos x_k son los *nodos* del mallado. Nótese que la relación entre el paso de malla h y el número de subintervalos N es la siguiente:

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Observación. El paso de malla juega un papel fundamental en el análisis de los métodos numéricos que vamos a presentar. Intuitivamente, mientras menor sea el paso de malla (esto es, mientras más puntos tenga el mallado) mejor será la aproximación de la solución. □

Observación. En la práctica se fija el número de subintervalos N, que debe ser un número entero, y después se define el paso de malla usando la relación $h = \frac{b-a}{N}$. Notemos que si damos directamente el paso de malla h y definimos $N = \frac{b-a}{h}$, podríamos obtener un valor no entero. □

Un *método numérico* para la resolución del problema de valor inicial es un algoritmo que permite obtener, para cada nodo x_k del mallado, una aproximación y_k del valor de la solución exacta en el nodo, $y(x_k)$:

$$y_k \approx y(x_k), \quad k = 0, \ldots, N.$$

El conjunto de puntos

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

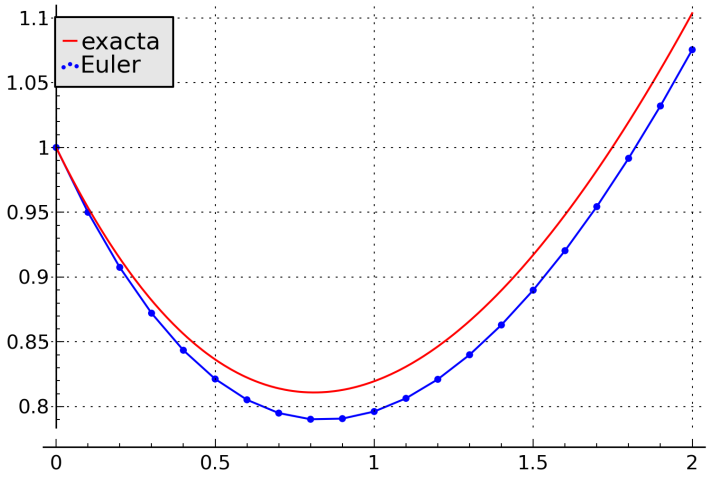


Figura 5.1: Comparación entre la solución exacta del problema $y' = \frac{x-y}{2}$, $y(0) = 1$, y el resultado obtenido con el método de Euler con paso de malla $h = 0{,}1$.

se denomina *solución numérica*. Nótese que el primer valor de la solución numérica es siempre exacto, $y_0 = y(a)$, por tratarse de la condición inicial del problema.

El *error local* cometido en cada nodo se define como

$$e_k = |y(x_k) - y_k|, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Si queremos considerar un *error global*, que involucre a toda la solución numérica, podemos definir

$$e = \max_{k=0,1,\ldots,N} e_k = \max_{k=0,1,\ldots,N} |y(x_k) - y_k|.$$

Notemos que el error e depende del paso de malla h; si queremos hacer resaltar esta dependencia, escribiremos $e(h)$ en lugar de e. Una propiedad deseable de cualquier método numérico es que el error tienda a cero cuando el paso de malla decrezca, esto es:

$$\lim_{h \to 0} e(h) = 0.$$

Cuando esto sucede, diremos que el método es *convergente*. Intuitivamente significa que al aumentar progresivamente el número de puntos de la partición (esto es, al hacer el paso de malla cada vez más pequeño), las correspondientes soluciones numéricas van reconstruyendo la solución exacta del problema.

5.2. El método de Euler

El *método de Euler* se fundamenta en una sencilla idea geométrica: aproximar el valor de la solución en cada nodo por el valor que proporciona la recta tangente a la solución trazada desde el nodo anterior.

Comenzamos construyendo la recta tangente a la solución exacta $y(x)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el punto (x_0, y_0):

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

Evaluemos ahora dicha recta en el nodo $x_1 = x_0 + h$ y llamemos y_1 al resultado obtenido:

$$y_1 = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + hy'(x_0).$$

Teniendo que cuenta que $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, podemos sustituir el valor $y'(x_0)$ por $f(x_0, y(x_0))$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y(x_0)).$$

Por último, haciendo uso de la condición inicial y teniendo en cuenta que $x_0 = a$, deducimos que

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Esta es la primera *iteración* o *paso* del método de Euler. En la figura 5.2 se representa la idea geométrica del método.

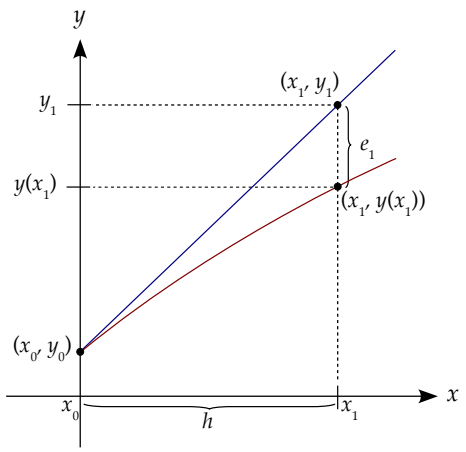


Figura 5.2: Interpretación geométrica del método de Euler.

Observación. Notemos que el valor y_1 puede determinarse, ya que x_0, y_0 y $f(x, y)$ son datos del problema, y h es conocido. □

El valor y_1 es la aproximación que proporciona el método de Euler al valor exacto de la solución en x_1:

$$y_1 \approx y(x_1),$$

siendo el error cometido

$$e_1 = |y(x_1) - y_1|.$$

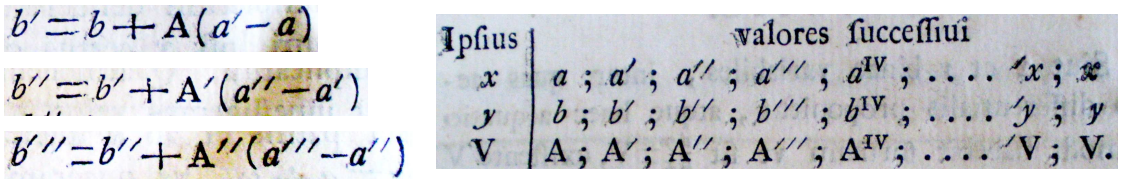
Una vez construido el punto (x_1, y_1), consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_1, b], \\ y(x_1) = y_1, \end{cases}$$

y repetimos el proceso anterior para obtener una aproximación y_2 en el nodo $x_2 = x_1 + h$. Dicha aproximación tendrá la forma

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Observación. Nótese que la solución de este nuevo problema de valor inicial no tiene por qué ser la misma solución del problema original, ya que la condición inicial es distinta. Sin embargo, si la función $f(x, y)$ es suficientemente regular, puede demostrarse que las soluciones a ambos problemas son suficientemente aproximadas. □



$b' = b + \mathrm{A}(a' - a)$

$b'' = b' + \mathrm{A}'(a'' - a')$

$b''' = b'' + \mathrm{A}''(a''' - a'')$

Ipſius	valores ſucceſſiui
x	a ; a' ; a'' ; a''' ; a^{IV} ; .... $'x$; x
y	b ; b' ; b'' ; b''' ; b^{IV} ; .... $'y$; y
V	A ; A′ ; A″ ; A‴ ; A$^{\mathrm{IV}}$; .... $'$V ; V.

Figura 5.3: Publicación original del método de Euler. E342, Inst. Calc. Integralis 1768, §650.

El proceso anterior se repite hasta llegar al último nodo $x_N = b$, obteniéndose así una serie de valores aproximados

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

que forman la solución numérica. Dicha solución dependerá del paso de malla h elegido.

Estamos ya en condiciones de definir la forma general del método de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde los valores iniciales x_0 e y_0 vienen dados por la condición inicial del problema. Cada valor y_k proporciona una aproximación del valor exacto de la solución en el nodo x_k:

$$y_k \approx y(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

siendo el error cometido

$$e_k = |y(x_k) - y_k|, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

Observación. Además del error e_k anteriormente definido, denominado *error de discretización*, en la práctica también hay que tener en cuenta los *errores de redondeo* que provienen de la representación de los números reales en el ordenador con una cantidad finita de cifras decimales. □

Ejemplo 5.1. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(x^2 - y), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

cuya solución exacta, obtenida mediante separación de variables, es

$$y(x) = x^2 - 4x + 8 - 7e^{-x/2}.$$

El método de Euler tiene en este caso la siguiente forma:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(x_k^2 - y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde $h = 1/N$.

En la tabla 5.1 se muestran, con una precisión de seis cifras decimales, los valores obtenidos con el método de Euler para $N = 10$ (paso de malla $h = 0{,}1$), así como los valores exactos de la solución y los errores cometidos. En este caso, el error global es igual a $e = 0{,}025697$.

En la figura 5.4 se representan la solución exacta del problema y la solución numérica obtenida.

Existe una implementación del método de Euler en Sage, cuyo uso se ilustra en el siguiente código:

```
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # nu'mero de particiones
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: eulers_method(fun, a, y0, h, b)
          x                    y                  h*f(x,y)
0.000000000000000     1.00000000000000   -0.0500000000000000
0.100000000000000    0.950000000000000   -0.0470000000000000
0.200000000000000    0.903000000000000   -0.0431500000000000
0.300000000000000    0.859850000000000   -0.0384925000000000
0.400000000000000    0.821357500000000   -0.0330678750000000
0.500000000000000    0.788289625000000   -0.0269144812500000
0.600000000000000    0.761375143750000   -0.0200687571875000
0.700000000000000    0.741306386562500   -0.0125653193281250
0.800000000000000    0.728741067234375  -0.00443705336171875
0.900000000000000    0.724304013872656   0.00428479930636718
1.00000000000000    0.728588813179023    0.0135705593410488
```

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0	0,0	1,000000	1,000000	0,000000
1	0,1	0,950000	0,951394	0,001394
2	0,2	0,903000	0,906138	0,003138
3	0,3	0,859850	0,865044	0,005194
4	0,4	0,821357	0,828885	0,007527
5	0,5	0,788290	0,798395	0,010105
6	0,6	0,761375	0,774272	0,012897
7	0,7	0,741306	0,757183	0,015877
8	0,8	0,728741	0,747760	0,019019
9	0,9	0,724304	0,746603	0,022299
10	1,0	0,728589	0,754285	0,025697

Tabla 5.1: Método de Euler: solución del ejemplo 5.1 con paso $h = 0{,}1$.

Vamos a representar en una misma gráfica el resultado obtenido y la solución exacta. Para ello, hagamos lo siguiente:

```
sage: sol = eulers_method(fun, a, y0, h, b, method='None')
sage: sol
[[0.000000000000000, 1.00000000000000],
 [0.100000000000000, 0.950000000000000],
 [0.200000000000000, 0.903000000000000],
 [0.300000000000000, 0.859850000000000],
 [0.400000000000000, 0.821357500000000],
 [0.500000000000000, 0.788289625000000],
 [0.600000000000000, 0.761375143750000],
 [0.700000000000000, 0.741306386562500],
 [0.800000000000000, 0.728741067234375],
 [0.900000000000000, 0.724304013872656],
 [1.00000000000000, 0.728588813179023],
 [1.10000000000000, 0.742159372520072]]
```

Como vemos, se ha calculado un punto de más. Podemos eliminarlo así:

```
sage: sol.pop(-1) # quitamos el elemento final de la lista
```

A continuación dibujamos los puntos obtenidos unidos por segmentos y la solución exacta del problema:

```
sage; # dibujamos los puntos obtenidos
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='Euler')
sage: #     y los unimos con segmentos
sage: fig1 += line(sol)
sage: #
sage: # Ca'lculo de la solucio'n exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0]); expand(sol_exacta)
x^2 - 4*x - 7*e^(-1/2*x) + 8
sage: #
```

```
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
```

El resultado puede contemplarse en la figura 5.4. Por último, si queremos determinar el error global cometido, ejecutamos las siguientes instrucciones:

```
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
Error = 0.0256965688325422
```

Alternativamente, en el siguiente código[1] se realiza una implementación del método de Euler y se aplica para resolver el problema anterior:

```
sage: # Me'todo de Euler
sage: def euler(fun, a, b, N, y0):
          h = (b-a)/N # paso de malla
          x = [a] # primer nodo
          y = [y0] # valor inicial

          for k in range(N):
              x.append(x[k]+h)
              y.append(y[k]+h*fun(x[k], y[k]))

          return zip(x, y)
sage: #
sage: ### Programa principal ###
sage: #
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # nu'mero de particiones
sage: sol = euler(fun, a, b, N, y0) # me'todo de Euler
sage: #
sage: # solucio'n exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0])
sage: #
sage: # errores
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
sage: #
sage: # gra'ficas
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='Euler',
      size='20')
sage: fig1 += line(sol, color='blue')
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
Error = 0.0256965688325422
```

Si queremos ver los errores cometidos en cada nodo, basta con escribir `error` en la línea de comandos:

[1] Es interesante señalar que Sage está basado en el lenguaje de programación Python. En particular, la definición del método de Euler utiliza la sintaxis propia de dicho lenguaje.

```
sage: error
[0.000000000000000, 0.00139402849500125, 0.00313807374828301,
 0.00519416502459535, 0.00752722845412812, 0.0101048935001661,
 0.0128973114779739, 0.0158769854065062, 0.0190186105161513,
 0.0222989247749311, 0.0256965688325422]
```

Asimismo, para ver los valores de los nodos y de las soluciones aproximadas, basta con escribir `sol`. □

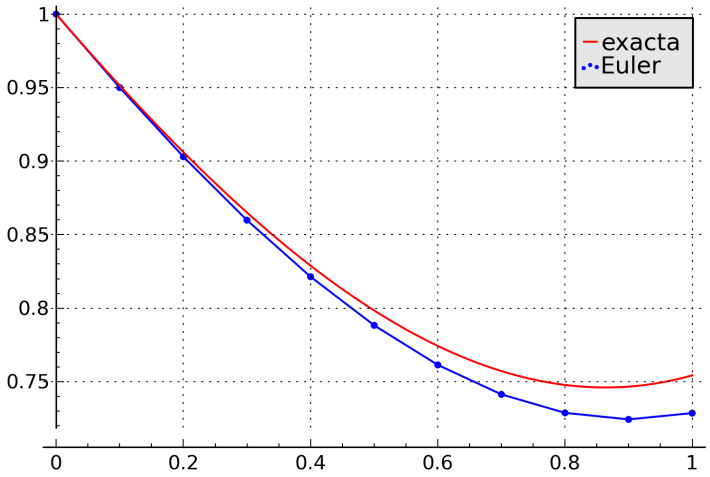


Figura 5.4: Soluciones numérica y exacta del ejemplo 5.1.

El siguiente teorema proporciona un resultado básico relativo al método de Euler.

Teorema. *Supóngase que la función $f(x,y)$ es de clase C^1 en $[a,b]\times\mathbb{R}$, y consideremos el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(t) = f(x, y(x)), & x \in [a,b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Existe entonces una constante $C > 0$, independiente del paso de malla h, tal que

$$e(h) \leqslant Ch,$$

donde $e(h)$ es el error global cometido al aproximar la única solución del problema de valor inicial mediante el método de Euler con paso de malla h. Como consecuencia, el método de Euler es convergente, *en el siguiente sentido:*

$$\lim_{h\to 0} e(h) = 0.$$

Observación. En la práctica, la desigualdad $e(h) \leqslant Ch$ se interpreta como

$$e(h) \approx Ch,$$

es decir, el error cometido con paso de malla h se *comporta como* Ch. Al respecto, existe una notación que ayuda a recordar esta interpretación: cuando existe $C > 0$ tal que $e(h) \leqslant Ch$ se dice que

$$e(h) = \mathcal{O}(h)$$

(se lee $e(h)$ es *o grande de* h). □

Cuando un método numérico verifica una condición del tipo $e(h) \approx Ch$, se dice que el método tiene *orden* uno. Para comprender la idea intuitiva que hay detrás de este concepto, supongamos que se aplica el método de Euler con pasos de malla h_1 y h_2, siendo $h_2 = h_1/2$. En tal caso, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} e(h_1) \approx Ch_1 \\ e(h_2) \approx Ch_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e(h_1)}{e(h_2)} \approx \frac{Ch_1}{Ch_2} = \frac{h_1}{h_2} = 2 \Rightarrow e(h_2) \approx \frac{e(h_1)}{2}.$$

Es decir, al dividir por dos el paso de malla el error también se divide aproximadamente por dos. En general, al dividir el paso de malla por un cierto valor M el error obtenido también se dividirá aproximadamente por M.

Observación. En general, un método numérico tiene *orden* p si existe una constante $C > 0$ tal que

$$e(h) \approx Ch^p.$$

Razonando como antes, podemos deducir que

$$\frac{e(h_1)}{e(h_2)} \approx \frac{Ch_1^p}{Ch_2^p} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p = 2^p \Rightarrow e(h_2) \approx \frac{e(h_1)}{2^p}.$$

Tomando logaritmos y despejando p, se obtiene una fórmula para determinar el orden del método:

$$p \approx \frac{\ln(e(h_1)/e(h_2))}{\ln 2}, \quad \text{con } h_2 = \frac{h_1}{2}.$$ □

En el siguiente ejemplo se comprueba empíricamente que el método de Euler tiene orden uno.

Ejemplo 5.2. Consideremos el problema del ejemplo 5.1. Habíamos visto que el error global obtenido con paso de malla $h = 0{,}1$ ($N = 10$) era

$$e(0{,}1) = 0{,}025697.$$

Doblemos ahora el número de subintervalos ($N = 20$) o, lo que es lo mismo, dividamos entre dos el paso de malla ($h = 0{,}05$). Al aplicar el método de Euler se obtiene un error global igual a

$$e(0{,}05) = 0{,}012830.$$

Observemos que

$$\frac{e(0{,}1)}{e(0{,}05)} = 2{,}002792 \approx 2 \Rightarrow e(0{,}05) \approx \frac{e(0{,}1)}{2},$$

es decir, al dividir entre dos el paso de malla el error cometido se divide aproximadamente entre dos. Por otra parte, al aplicar la fórmula para aproximar el orden se obtiene:

$$p \approx \frac{\ln(0{,}025697/0{,}012830)}{\ln 2} \approx 1{,}002079 \approx 1.$$

Al realizar el experimento un cierto número de veces se obtienen los resultados de la tabla 5.2, donde en la penúltima columna se escriben los cocientes entre dos errores consecutivos, y en la última las correspondientes aproximaciones del orden.

N	h	$e(h)$	cocientes	orden
10	0,100000	0,025697	–	–
20	0,050000	0,012830	2,002792	1,002012
40	0,025000	0,006410	2,001471	1,001061
80	0,012500	0,003204	2,000753	1,000543
160	0,006250	0,001602	2,000381	1,000275

Tabla 5.2: Estudio del orden del método de Euler.

Como puede verse, estas aproximaciones tienden a 1, que es el orden del método de Euler. □

Una consecuencia inmediata de la condición $e(h) \leqslant Ch$, como afirma la segunda parte del teorema, es que el método de Euler es convergente. En efecto:

$$0 \leqslant \lim_{h\to 0} e(h) \leqslant \lim_{h\to 0} Ch = C \lim_{h\to 0} h = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} e(h) = 0.$$

La idea intuitiva es que, conforme el paso de malla tiende a cero, la solución numérica converge hacia la solución analítica. Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3. Consideremos de nuevo el problema del ejemplo 5.1. En la tabla 5.3 se muestran los errores obtenidos con una serie de pasos de malla que tienden a cero. Como puede observarse, dichos errores se van aproximando a cero.

Asimismo, en la figura 5.5 se representan la solución exacta y las soluciones aproximadas con pasos de malla 10^{-1} y 10^{-2} (el resto de las soluciones son indistinguibles de la solución exacta en la figura). Observamos que mientras menor es el paso de malla, más se aproxima la solución numérica a la solución exacta. □

N	h	$e(h)$
10	10^{-1}	$2{,}5697 \cdot 10^{-2}$
10^2	10^{-2}	$2{,}5630 \cdot 10^{-3}$
10^3	10^{-3}	$2{,}5623 \cdot 10^{-4}$
10^4	10^{-4}	$2{,}5626 \cdot 10^{-5}$
10^5	10^{-5}	$2{,}5622 \cdot 10^{-6}$
10^6	10^{-6}	$2{,}5623 \cdot 10^{-7}$

Tabla 5.3: Convergencia del método de Euler.

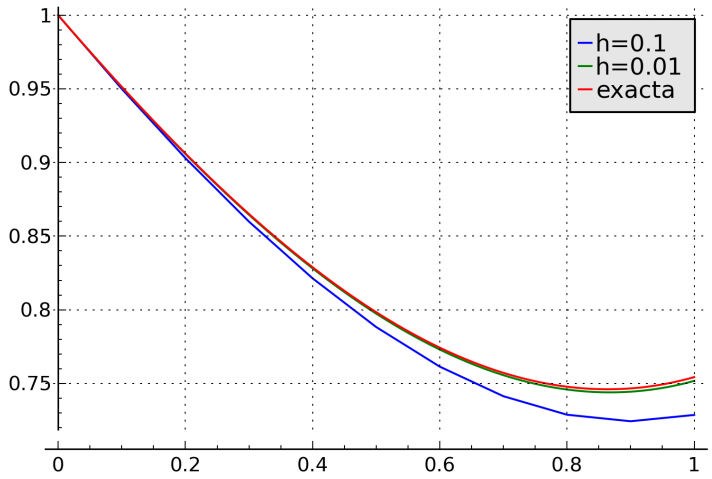


Figura 5.5: Soluciones numéricas y exacta del ejemplo 5.3.

5.3. Métodos de orden superior

Comenzaremos esta sección dando una interpretación física del método de Euler. Para ello, consideremos una partícula cuya posición en el instante x denotaremos por $y(x)$. Supongamos que la velocidad de la partícula puede expresarse como una función $f(x, y)$, dependiente del tiempo x y la posición y. En tal caso, $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y).$$

La primera iteración del método de Euler se puede escribir como

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$

donde $x_1 - x_0 = h$ es el paso de malla. El punto y_0 representa la posición inicial de la partícula e y_1 su posición final. El término $f(x_0, y_0)$ puede interpretarse como la velocidad inicial de la partícula, mientras que $x_1 - x_0$ es el tiempo transcurrido. El

producto $(x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$ representa por tanto el espacio recorrido por la partícula entre los instantes x_0 y x_1, si se supone que ésta viaja siempre a velocidad $f(x_0, y_0)$. Estamos pues aproximando la posición final de la partícula como la posición inicial más el espacio recorrido al viajar a una velocidad constante igual a la velocidad inicial. Esta es la *interpretación cinética* del método de Euler.

En lugar de considerar la velocidad inicial $f(x_0, y_0)$ como estimación de la velocidad en el intervalo $[x_0, x_1]$, podríamos considerar una aproximación distinta. Por ejemplo, podríamos pensar en utilizar la media de las velocidades inicial y final, la velocidad en el punto medio, o incluso un promedio general de velocidades. Al considerar cada una de estas posibilidades se obtienen diferentes métodos numéricos, que presentaremos a continuación.

5.3.1. Método de Heun o de Euler mejorado

Consideremos la media entre las velocidades inicial $f(x_0, y_0)$ y final $f(x_1, y_1)$ de la partícula. Podemos entonces escribir la aproximación y_1 de la posición final de la siguiente forma:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} \Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)).$$

Notemos que el término $f(x_1, y_1)$ depende explícitamente de y_1, que es desconocido a priori. Para solventar este problema, podemos aproximar el valor de y_1 en $f(x_1, y_1)$ mediante una iteración del método de Euler, que denotaremos por p_1:

$$p_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \Rightarrow f(x_1, y_1) \approx f(x_1, p_1).$$

Obtenemos de esta forma:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, p_1)),$$

que es la primera iteración del método de Heun.

La expresión general del *método de Heun* o de *Euler mejorado* es la siguiente:

$$\begin{cases} p_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, p_{k+1})), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Notemos que el punto $x_{k+1} = x_k + h$ es conocido en cada paso.

Observación. El método de Heun es un ejemplo de método *predictor-corrector*. El valor p_{k+1} se interpreta como una predicción para el valor buscado $y(x_{k+1})$, que luego se corrige para obtener el valor final y_{k+1}.

Puede probarse que el método de Heun es de orden dos: existe una constante $C > 0$, independiente del paso de malla h, tal que

$$e(h) \leqslant Ch^2,$$

(o dicho de otro modo, $e(h) = \mathcal{O}(h^2)$) siendo $e(h)$ el error global obtenido al aproximar la solución mediante el método de Heun con paso de malla h. Como consecuencia, el método de Heun es convergente.

Al ser el método de Heun de orden dos, al dividir el paso de malla entre dos el error cometido se dividirá aproximadamente entre $2^2 = 4$. Por tanto, el método de Heun proporciona un resultado más preciso que el método de Euler, si en ambos usamos el mismo paso de malla. Estos hechos quedarán patentes en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4. Retomemos el problema del ejemplo 5.1. Al aplicar el método de Heun para resolverlo con paso de malla $h = 0,1$, se obtienen los resultados de la tabla 5.4. Si comparamos estos resultados con los de la tabla 5.1, vemos que la precisión del método de Heun es superior a la del método de Euler.

k	t_k	x_k	$y(x_k)$	e_k
0	0,0	1,000000	1,000000	0,000000
1	0,1	0,951500	0,951394	$1{,}0597 \cdot 10^{-4}$
2	0,2	0,906352	0,906138	$2{,}1380 \cdot 10^{-4}$
3	0,3	0,865367	0,865044	$3{,}2306 \cdot 10^{-4}$
4	0,4	0,829318	0,828885	$4{,}3334 \cdot 10^{-4}$
5	0,5	0,798939	0,798395	$5{,}4429 \cdot 10^{-4}$
6	0,6	0,774928	0,774272	$6{,}5559 \cdot 10^{-4}$
7	0,7	0,757950	0,757183	$7{,}6693 \cdot 10^{-4}$
8	0,8	0,748638	0,747760	$8{,}7805 \cdot 10^{-4}$
9	0,9	0,747591	0,746603	$9{,}8870 \cdot 10^{-4}$
10	10,0	0,755384	0,754285	$1{,}0987 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5.4: Método de Heun: solución del ejemplo 5.1 con paso $h = 0,1$.

En la figura 5.6 se comparan gráficamente los resultados obtenidos con los métodos de Euler y Heun.

Los resultados obtenidos al dividir sucesivamente entre dos el paso de malla se muestran en la tabla 5.5 . Como puede comprobarse, el cociente entre errores sucesivos tiende a $2^2 = 4$ y las aproximaciones del orden convergen hacia 2.

El método de Heun no viene implementado en Sage, por lo que es necesario programarlo directamente. El siguiente código Sage, que incluye una implementación del método de Heun, se ha utilizado para generar parte de la figura 5.6:

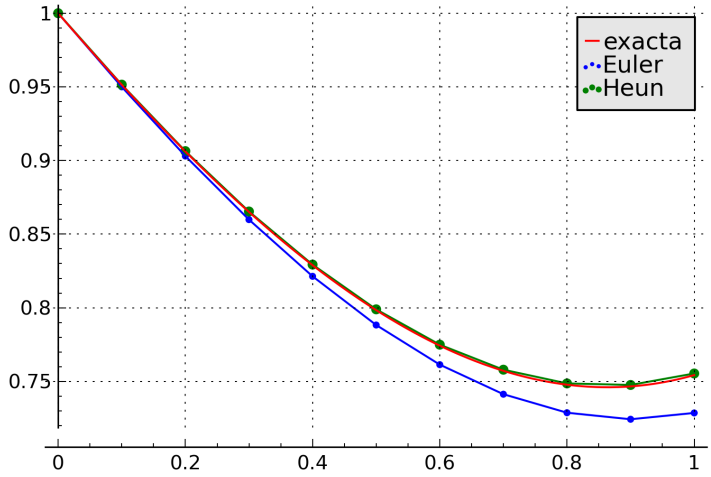


Figura 5.6: Ejemplo 5.4: resultados obtenidos con los métodos de Euler y Heun.

N	h	$e(h)$	cocientes	orden
10	0,100000	$1{,}0987 \cdot 10^{-3}$	—	—
20	0,050000	$2{,}7270 \cdot 10^{-4}$	4,028877	2,010378
40	0,025000	$6{,}7926 \cdot 10^{-5}$	4,014620	2,005263
80	0,012500	$1{,}6950 \cdot 10^{-5}$	4,007353	2,002650
160	0,006250	$4{,}2337 \cdot 10^{-6}$	4,003687	2,001329

Tabla 5.5: Estudio del orden del método de Heun.

```
sage: # Me'todo de Heun
sage: def heun(fun, a, b, N, y0):
          h = (b-a)/N # paso de malla
          x = [a] # primer nodo
          y = [y0] # valor inicial

          for k in range(N):
              x.append(x[k]+h)
              aux = fun(x[k], y[k])
              p = y[k]+h*aux # prediccio'n
              y.append(y[k]+(h/2)*(aux+fun(x[k]+h, p))) # correccio'n

          return zip(x, y)
sage: #
sage: ### Programa principal ###
sage: #
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # nu'mero de particiones
```

```
sage: sol = heun(fun, a, b, N, y0) # me'todo de Heun
sage: #
sage: # solucio'n exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0])
sage: #
sage: # errores
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
sage: #
sage: # gra'ficas
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='Heun',
      size='20')
sage: fig1 += line(sol, color='blue')
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
Error = 0.00109866300079819
```

□

5.3.2. Método del punto medio

Sea $y(x_{1/2})$ el valor de la solución en el punto medio $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ del intervalo $[x_0, x_1]$, y sea $y_{1/2}$ una aproximación del mismo. Si consideramos la velocidad en dicho punto, $f(x_{1/2}, y_{1/2})$, la posición final y_1 puede escribirse como

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_{1/2}, y_{1/2}) \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_{1/2}).$$

Para aproximar el valor $y_{1/2}$ consideramos una iteración del método de Euler con paso de malla $h/2$:

$$y_{1/2} \approx x_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0).$$

Obtenemos así la primera iteración del método del punto medio:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f(x_0, y_0)).$$

La expresión general del *método del punto medio* es la siguiente:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \\ x_{k+1} = x_k + h, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

El método del punto medio tiene orden dos, por lo que en general será comparable al método de Heun.

Ejemplo 5.5. Al realizar el experimento del ejemplo 5.1, se obtienen los resultados de la tabla 5.6. Para este problema, los resultados obtenidos con el método del punto

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0	0,0	1,000000	1,000000	0,000000
1	0,1	0,951375	0,951394	$1{,}9028 \times 10^{-5}$
2	0,2	0,906108	0,906138	$3{,}0105 \times 10^{-5}$
3	0,3	0,865010	0,865044	$3{,}3960 \times 10^{-5}$
4	0,4	0,828853	0,828885	$3{,}1271 \times 10^{-5}$
5	0,5	0,798372	0,798395	$2{,}2667 \times 10^{-5}$
6	0,6	0,774264	0,774272	$8{,}7313 \times 10^{-6}$
7	0,7	0,757193	0,757183	$9{,}9954 \times 10^{-6}$
8	0,8	0,747797	0,747760	$3{,}3013 \times 10^{-5}$
9	0,9	0,746663	0,746603	$5{,}9858 \times 10^{-5}$
10	10,0	0,754375	0,754285	$9{,}0104 \times 10^{-5}$

Tabla 5.6: Método del punto medio: solución del ejemplo 5.1 con paso $h = 0{,}1$.

N	h	$e(h)$	cocientes
10	0,100000	$9{,}0104 \times 10^{-5}$	–
20	0,050000	$2{,}3686 \times 10^{-5}$	3,804051
40	0,025000	$6{,}0610 \times 10^{-6}$	3,907965
80	0,012500	$1{,}5324 \times 10^{-6}$	3,955388
160	0,006250	$3{,}8520 \times 10^{-7}$	3,978037
320	0,003125	$9{,}6563 \times 10^{-8}$	3,989102

Tabla 5.7: Estudio del orden del método del punto medio.

medio son más precisos que los obtenidos con el método de Heun, aunque ambos métodos tengan orden dos.

Por otra parte, al dividir sucesivamente el paso de malla por dos se obtienen los resultados de la tabla 5.7, que muestran que el método tiene orden dos.

Los resultados anteriores han sido obtenidos con el siguiente código Sage:

```
sage: # Me'todo del punto medio
sage: def punto_medio(fun, a, b, N, y0):
          h = (b-a)/N # paso de malla
          x = [a] # primer nodo
          y = [y0] # valor inicial
          for k in range(N):
              x.append(x[k]+h)
              aux = y[k]+(h/2)*fun(x[k], y[k]) # Euler con paso h/2
              y.append(y[k]+h*fun(x[k]+h/2, aux))

          return zip(x, y)
sage: #
sage: ### Programa principal ###
```

```
sage: #
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # nu'mero de particiones
sage: sol = punto_medio(fun, a, b, N, y0) # me'todo del punto medio
sage: #
sage: # solucio'n exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0])
sage: #
sage: # errores
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
sage: #
sage: # gra'ficas
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='punto medio',
      size='20')
sage: fig1 += line(sol, color='blue')
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
Error = 0.00009010368710404 84
```

□

5.3.3. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El *método de Runge-Kutta de cuarto orden* (de forma abreviada, RK4) tiene la siguiente expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2), \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3). \end{cases}$$

En este caso se ha considerado un promedio de cuatro velocidades diferentes: una en el nodo inicial x_k, dos correcciones en el nodo intermedio $x_k + \frac{h}{2}$, y otra en el nodo final $x_k + h$.

El método de Runge-Kutta tiene orden cuatro, es decir, existe una constante $C > 0$, independiente del paso de malla h, tal que

$$e(h) \leqslant Ch^4,$$

donde $e(h)$ es el error global que se produce al aproximar la solución del problema mediante el método de Runge-Kutta con paso de malla h (dicho de otra forma, $e(h) = \mathcal{O}(h^4)$). De este modo, al dividir el paso de malla entre dos el error se divide entre $2^4 = 16$.

Observación. Existe una clase general de métodos Runge-Kutta de orden arbitrario, de los cuales el aquí estudiado no es más que un caso particular. □

Ejemplo 5.6. Al aplicar el método de Runge-Kutta con paso de malla $h = 0{,}1$ al problema del ejemplo 5.1, se obtienen los resultados de la tabla 5.8. Es claro que el método de Runge-Kutta produce resultados mucho más precisos que los métodos de Euler o de Heun para el mismo paso de malla.

k	t_k	x_k	$y(x_k)$	e_k
0	0,0	1,000000	1,000000	0,000000
1	0,1	0,951394	0,951394	$7{,}9633 \cdot 10^{-9}$
2	0,2	0,906138	0,906138	$1{,}6420 \cdot 10^{-8}$
3	0,3	0,865044	0,865044	$2{,}5303 \cdot 10^{-8}$
4	0,4	0,828885	0,828885	$3{,}4550 \cdot 10^{-8}$
5	0,5	0,798395	0,798395	$4{,}4106 \cdot 10^{-8}$
6	0,6	0,774273	0,774272	$5{,}3917 \cdot 10^{-8}$
7	0,7	0,757183	0,757183	$6{,}3936 \cdot 10^{-8}$
8	0,8	0,747760	0,747760	$7{,}4120 \cdot 10^{-8}$
9	0,9	0,746603	0,746603	$8{,}4429 \cdot 10^{-8}$
10	10,0	0,754285	0,754285	$9{,}4825 \cdot 10^{-8}$

Tabla 5.8: Método de Runge-Kutta: solución del ejemplo 5.1 con paso $h = 0{,}1$.

N	h	$e(h)$	cocientes	orden
10	0,100000	$9{,}4825 \cdot 10^{-8}$	–	–
20	0,050000	$5{,}9132 \cdot 10^{-9}$	16,036346	4,003274
40	0,025000	$3{,}6911 \cdot 10^{-10}$	16,020039	4,001806
80	0,012500	$2{,}3053 \cdot 10^{-11}$	16,011356	4,001024
160	0,006250	$1{,}4405 \cdot 10^{-12}$	16,003314	4,000299

Tabla 5.9: Estudio del orden del método de Runge-Kutta.

Asimismo, al realizar el experimento de divisiones sucesivas del paso de malla, se obtienen los resultados de la tabla 5.9. Dichos resultados muestran que el método de Runge-Kutta tiene orden cuatro.

En Sage existe una implementación del método RK4, cuyo uso puede verse en el siguiente código:

```
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # particiones
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: desolve_rk4(fun, y, ics=[a, y0], end_points=[a, b], step=h)
[[0.000000000000000, 1.00000000000000],
 [0.1, 0.951394036458],
 [0.2, 0.906138090168],
 [0.3, 0.865044190327],
 [0.4, 0.828884763004],
 [0.5, 0.798394562606],
 [0.6, 0.774272509145],
 [0.7, 0.757183435905],
 [0.8, 0.747759751871],
 [0.9, 0.746603023076],
 [1.0, 0.754285476837]]
```

Si queremos dibujar el resultado, así como la solución exacta, basta con hacer:

```
sage: sol = desolve_rk4(fun, y, ics=[a, y0], end_points=[a, b], step=h)
sage: fig1 = list_plot(sol, color='green', legend_label='RK4',
      size='20')
sage: fig1 += line(sol, color='green')
sage: # exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0])
sage: #
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
```

La gráfica resultante es similar a la de la figura 5.7, donde también se ha dibujado el resultado obtenido con el método de Euler para comparar. Para calcular el error cometido, ejecutamos:

```
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
Error = 9.48253844335e-08
```

De forma alternativa, el siguiente código proporciona una implementación directa del método RK4:

```
sage: # Me'todo RK4 (Runge-Kutta de cuarto orden)
sage: def rk4(fun, a, b, N, y0):
          h = (b-a)/N # paso de malla
          x = [a] # primer nodo
          y = [y0] # valor inicial

          for k in range(N):
              x.append(x[k]+h)
              K1 = fun(x[k], y[k])
              K2 = fun(x[k]+h/2, y[k]+(h/2)*K1)
```

```
                K3 = fun(x[k]+h/2, y[k]+(h/2)*K2)
                K4 = fun(x[k]+h, y[k]+h*K3)
                y.append(y[k]+(h/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4))

            return zip(x, y)
sage: #
sage: ### Programa principal ###
sage: #
sage: var('x, y')
sage: fun(x, y) = (x^2-y)/2 # segundo miembro de la ecuacio'n
sage: a = 0. # extremo inferior
sage: b = 1. # extremo superior
sage: y0 = 1. # valor inicial
sage: N = 10 # nu'mero de particiones
sage: sol = rk4(fun, a, b, N, y0) # me'todo RK4
sage: #
sage: # solucio'n exacta
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x) == fun(x, y)
sage: sol_exacta = desolve(ec, y, ics=[0, y0])
sage: #
sage: # errores
sage: error = [abs(sol_exacta(x)-y) for (x, y) in sol]
sage: print('Error = %r' % max(error))
sage: #
sage: # gra'ficas
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='RK4', size='20')
sage: fig1 += line(sol, color='blue')
sage: fig2 = plot(sol_exacta, a, b, color='red', legend_label='exacta',
      gridlines='True')
sage: show(fig1 + fig2)
Error = 9.48253855437287e-8
```

□

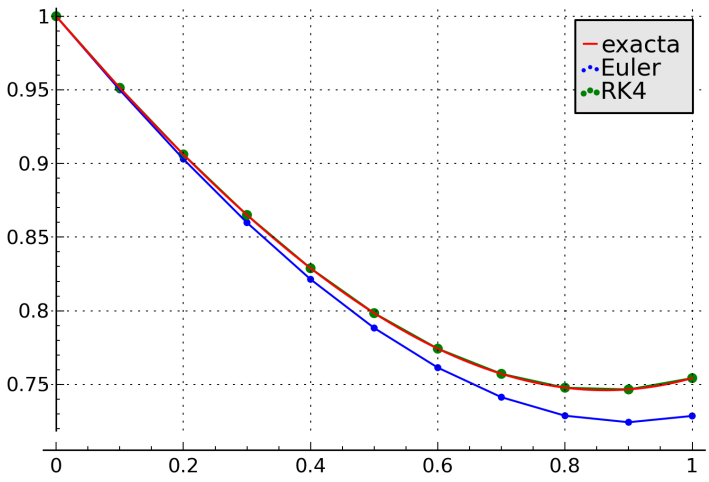


Figura 5.7: Ejemplo 5.6: resultados obtenidos con los métodos de Euler y RK4.

Ejemplo 5.7. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y + \cos(x), & x \in [0, 4\pi], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + e^{-x}}{2}.$$

Al resolver el problema mediante los métodos presentados en esta sección se obtienen los resultados de la tabla 5.10. Como puede observarse, el método de Euler es el que proporciona peores resultados, mientras que el método de Runge-Kutta es el más preciso.

N	Euler	Heun	Runge-Kutta
25	$1{,}4781 \cdot 10^{-1}$	$4{,}3932 \cdot 10^{-2}$	$3{,}9247 \cdot 10^{-4}$
50	$6{,}9090 \cdot 10^{-2}$	$9{,}6635 \cdot 10^{-3}$	$2{,}1724 \cdot 10^{-5}$
100	$3{,}3713 \cdot 10^{-2}$	$2{,}2901 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2866 \cdot 10^{-6}$
250	$1{,}3254 \cdot 10^{-2}$	$3{,}5386 \cdot 10^{-4}$	$3{,}1808 \cdot 10^{-8}$
500	$6{,}5896 \cdot 10^{-3}$	$8{,}7449 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9651 \cdot 10^{-9}$
1000	$3{,}2856 \cdot 10^{-3}$	$2{,}1738 \cdot 10^{-5}$	$1{,}2211 \cdot 10^{-10}$
2500	$1{,}3120 \cdot 10^{-3}$	$3{,}4662 \cdot 10^{-6}$	$3{,}1230 \cdot 10^{-12}$

Tabla 5.10: Errores obtenidos al resolver el problema del ejemplo 5.7.

En las figuras 5.8 y 5.9 se han representado las soluciones numéricas obtenidas con $N = 25$ y $N = 50$ particiones, respectivamente. □

5.4. Algunas consideraciones

Existe una forma alternativa de deducir los métodos numéricos presentados en la sección anterior, más formal desde el punto de vista matemático. Si integramos la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ entre dos nodos consecutivos, obtenemos:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx \Rightarrow y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

tras aplicar la regla de Barrow en el primer miembro. Por tanto, tenemos que

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx.$$

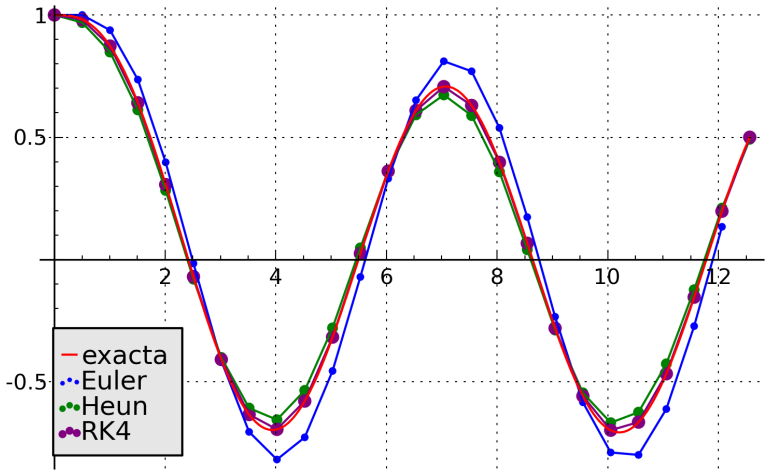


Figura 5.8: Ejemplo 5.7: soluciones obtenidas con $N = 25$.

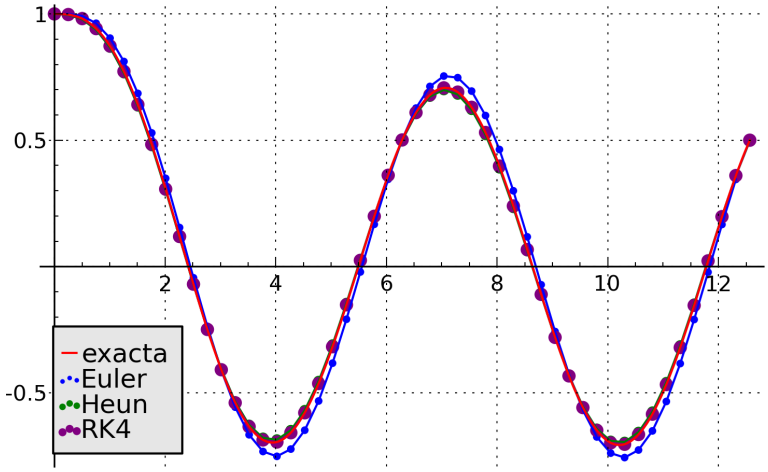


Figura 5.9: Ejemplo 5.7: soluciones obtenidas con $N = 50$.

A continuación aproximamos $y(x_k)$ e $y(x_{k+1})$ por y_k e y_{k+1}, respectivamente. La integral se aproxima mediante una *fórmula de cuadratura* o de integración numérica:

$$y_{k+1} = y_k + \left\{ \text{fórmula de cuadratura para } \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx \right\}.$$

Al aplicar distintas fórmulas de cuadraturas, se obtienen distintos métodos numéricos. Por ejemplo, al aproximar la integral mediante la *fórmula del rectángulo*,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx \approx h f(x_k, y_k),$$

se obtiene el método de Euler:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Esta técnica permite construir métodos numéricos más generales que los estudiados en esta sección.

Todos los métodos numéricos estudiados pueden aplicarse para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Para ello, basta con aplicar el método elegido a cada una de las componentes del sistema. Por ejemplo, el método de Euler para resolver el problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)), & t \in [a, b], \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)), \\ x(a) = x_0, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

adoptaría la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k), \\ y_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k), & k = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

De manera análoga se escribirían los métodos de Heun y Runge-Kutta.

Por último, consideremos un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), y(t)), \\ x(a) = x_0, \\ x'(a) = x'_0. \end{cases}$$

Su resolución numérica pasa por transformarlo en un problema de valores iniciales y aplicar alguno de los métodos numéricos estudiados a dicho problema. Llamando $y(t) = x'(t)$ e $y_0 = x'_0$, obtenemos:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)), \\ x(a) = x_0, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

En este caso, la solución numérica del sistema consta de dos sucesiones de valores aproximados: $\{x_k\}_{k=0}^N$, que aproxima a la solución $x(t)$, e $\{y_k\}_{k=0}^N$, que aproxima a la derivada de la solución $y(t) = x'(t)$.

5.5. Aplicaciones

5.5.1. Deflexión de vigas en voladizo

La ecuación diferencial que determina el desplazamiento de una viga puede determinarse a partir de la relación existente entre el *momento flector* $M(x)$ (que depende de la distribución de carga que soporta la viga), el radio de curvatura $\kappa(x)$ de la curva $y(x)$ que define la forma de la viga, el módulo de elasticidad E (que depende del material) y el momento de inercia I (que depende de la geometría de la viga). Dicha relación es la siguiente:

$$M(x) = \frac{\kappa(x)}{EI}.$$

Teniendo en cuenta que el radio de curvatura depende de las dos primeras derivadas de $y(x)$, puede deducirse la siguiente ecuación no lineal:

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}(1 + y'(x))^{3/2}, \quad x \in [0, L],$$

donde L es la longitud de la viga.

Cuando la flexión de la viga es pequeña, se tiene que $y'(x) \approx 0$. Por tanto, asumiendo esta hipótesis de pequeñas deformaciones, obtenemos:

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad x \in [0, L].$$

Si consideramos el caso de una viga en voladizo, debemos imponer las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

La condición $y(0) = 0$ indica que el extremo izquierdo de la viga está situado en el origen de coordenadas, mientras que la condición $y'(0) = 0$ nos dice que dicho extremo permanece fijo. De esta forma hemos expresado $y(x)$ como solución de un problema de valores iniciales. Para resolverlo numéricamente será necesario escribirlo en forma de sistema, tal y como comentamos al final de la sección 5.3.

La ecuación diferencial obtenida depende de la forma del momento flector, que a su vez depende de la distribución de la carga que soporta la viga. Vamos a tener en cuenta dos casos:

- Carga uniformemente distribuida P (figura 5.10):

$$M(x) = \int_x^L \frac{-P}{L}(t - x)\, dt = -\frac{P}{2L}(L - x)^2.$$

- Carga puntual P en el extremo de la viga en voladizo (figura 5.11):

$$M(x) = -P(L - x).$$

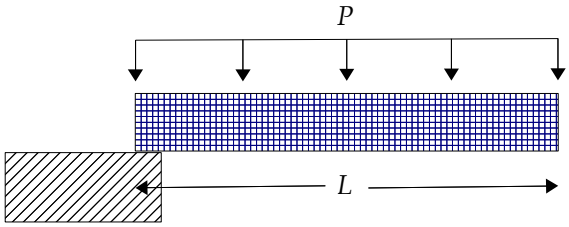


Figura 5.10: Deflexión de una viga en voladizo con carga uniformemente distribuida: esquema.

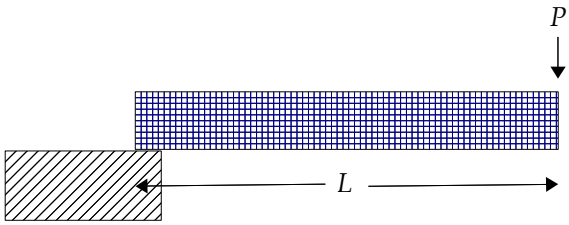


Figura 5.11: Deflexión de una viga en voladizo con carga puntual en un extremo: esquema.

Consideremos una viga de longitud $L = 2$ m y tomemos los valores $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2 y $I = 7{,}85 \cdot 10^{-9}$ m^4 (véase el ejemplo 3.35). En las figuras 5.12 y 5.13 se representan los resultados obtenidos al aplicar el método RK4 con $N = 20$ particiones y $P = 150$. En la figura 5.12 se ha supuesto que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la viga, mientras que la figura 5.13 representa el caso de una carga puntual situada en el extremo derecho de la viga. Como puede observarse, en este último caso la hipótesis de pequeñas deformaciones es menos plausible.

Damos a continuación el código Sage que se ha utilizado para resolver los problemas considerados:

```
sage: # Deflexio'n de vigas en voladizo
sage: # ------------------------------
sage: #
sage: # Ecuacio'n:  y''=(M(x)/(EI))*(1+y')^(3/2) en [0, L].
sage: # Condiciones iniciales: y(0)=0, y'(0)=0.
sage: #
sage: # En forma de sistema:
sage: #    y1' = y2
sage: #    y2' = (M(x)/(EI))*(1+y2)^(3/2)
sage: #
sage: # Condiciones iniciales: y1(0)=0, y2(0)=0.
sage: #
sage: # Me'todo: RK4 para sistemas
```

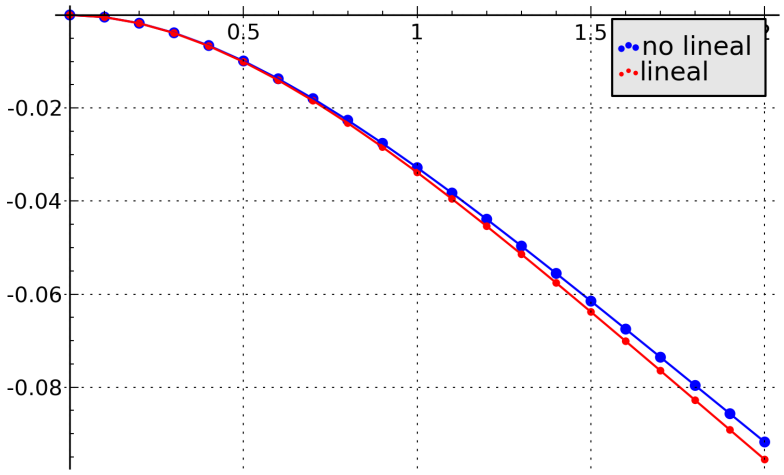


Figura 5.12: Viga en voladizo: carga uniformemente distribuida.

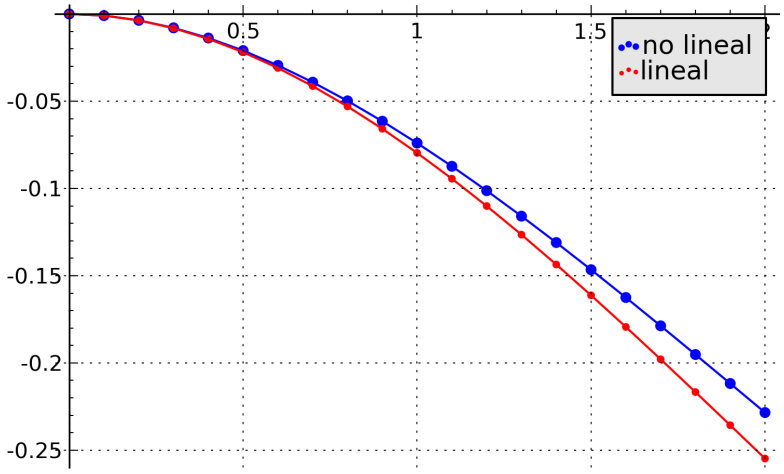


Figura 5.13: Viga en voladizo: carga puntual en el extremo de la viga.

```
sage: #
sage: # datos del problema
sage: L = 2. # longitud de la viga
sage: Q = 0. # carga axial
sage: E = 2.e11 # modulo de elasticidad
sage: I = 7.85e-9 # momento de inercia
sage: P = 150. # carga
sage: #
sage: # condiciones iniciales
sage: y10 = 0.
sage: y20 = 0.
sage: #
sage: # segundo miembro de la ecuacio'n no lineal
sage: op = 0 # opciones:
```

```
            # 0: carga uniformemente distribuida
            # 1: carga puntual en el extremo de la viga

sage: if (op == 0):
          # carga uniformemente distribuida
          R(x) = -(P/(2.*L))*(L-x)^2/(E*I)
      else:
          # carga puntual en el extremo de la viga
          R(x) = -P*(L-x)/(E*I)

sage: #
sage: ### Me'todo RK4 para sistemas ###
sage: #
sage: N = 20 # nu'mero de particiones
sage: h = L/N # paso de malla
sage: #
sage: var('x, y1, y2')
sage: # solucio'n del caso no lineal
sage: sol_NL = desolve_system_rk4([y2, R(x)*(1.+y2)^1.5], [y1, y2],
      ics=[0, y10, y20], ivar=x, step=h, end_points=2)
sage: #
sage: # solucio'n del caso lineal
sage: sol_L = desolve_system_rk4([y2, R(x)], [y1, y2],
      ics=[0, y10, y20], ivar=x, step=h, end_points=2)
sage: #
sage: # dibujamos las soluciones
sage: sol1 = [[i, j] for (i, j, k) in sol_NL] # solucio'n no lineal
sage: sol2 = [[i, j] for (i, j, k) in sol_L] # solucio'n lineal
sage: fig1 = list_plot(sol1, legend_label='no lineal', size='20',
      gridlines='True')
sage: fig1 += line(sol1)
sage: fig2 = list_plot(sol2, color='red', legend_label='lineal')
sage: fig2 += line(sol2, color='red')
sage: show(fig1 + fig2)
```

5.5.2. El péndulo perturbado

En la sección 4.5.3 habíamos considerado el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{g}{L}\operatorname{sen}(x) - \dfrac{a}{m}y, \end{cases}$$

que modeliza el comportamiento de un péndulo de longitud L y masa m, sometido a la fuerza gravitatoria y a una fuerza de rozamiento, cuyas constantes respectivas son g y a. La variable x representa el ángulo que forma el péndulo con la vertical, mientras que y es la correspondiente velocidad angular.

A continuación, resolveremos numéricamente el sistema en el intervalo $[0, 10]$, considerando las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

y los datos $m = 1$, $L = 1$ y $g = 9{,}81$; supondremos además que no hay rozamiento, es decir, $a = 0$. En la figura 5.14 se representa la componente x de la solución obtenida con los métodos de Euler, Heun, punto medio y Runge-Kutta, usando $N = 300$ particiones. Como puede observarse, el método de Euler falla estrepitosamente al aproximar dicha solución con el número de particiones elegido, mientras que los demás métodos dan resultados muy similares. La solución obtenida es periódica, lo que indica que el péndulo oscila indefinidamente en torno a la posición de equilibrio.

Observación. En el caso estudiado, para obtener resultados aceptables con el método de Euler harían falta del orden de $N = 10000$ particiones. La falta de precisión observada es debida a que el método es tan sólo de orden uno.

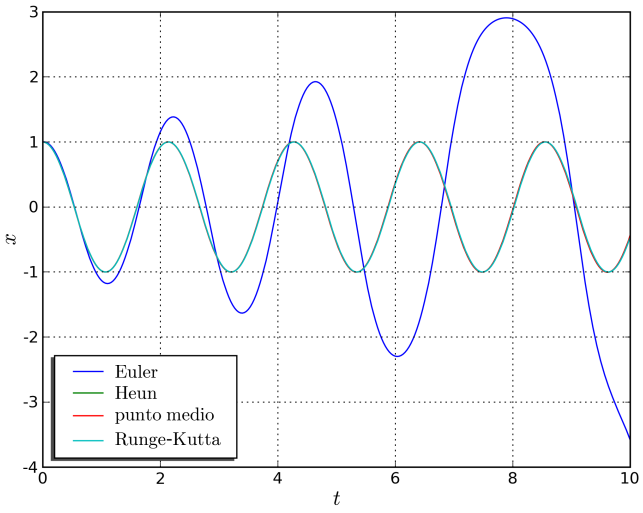


Figura 5.14: Péndulo no amortiguado: soluciones obtenidas con $N = 300$ particiones.

A continuación consideraremos tan sólo el método de Runge-Kutta para realizar los experimentos, ya que es el más preciso de todos los que hemos estudiado. Si introducimos rozamiento en el sistema, con constante $a = 1{,}2$, se obtienen los resultados de la figura 5.15, donde hemos representado tanto el ángulo como la velocidad. Puede observarse que por efecto de la fuerza de rozamiento las oscilaciones iniciales se van amortiguando, tendiendo de este modo el péndulo hacia la posición de equilibrio.

Por último, supongamos que sobre el péndulo actúa una fuerza periódica externa de la forma $g(t) = \cos(2t)$. Para estudiar el efecto de esta fuerza externa, consideraremos los valores $m = 1$, $L = 1$, $g = 9{,}81$ y $a = 0{,}1$; las condiciones iniciales serán de la forma

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

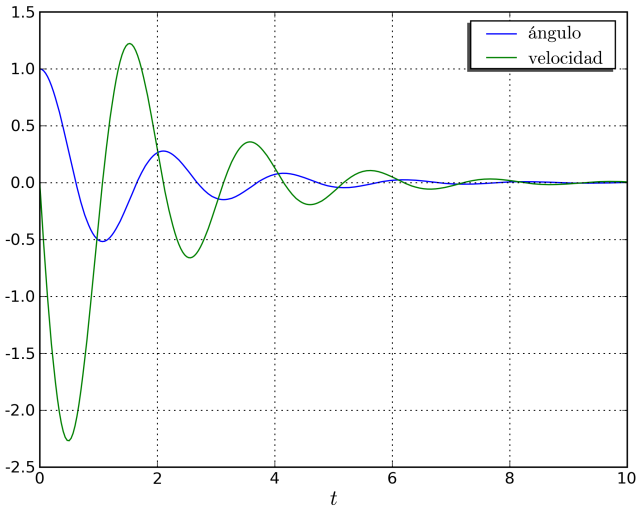


Figura 5.15: Péndulo amortiguado: solución obtenida con $N = 300$ particiones.

En tal caso, la solución del problema obtenida con $N = 1000$ particiones se representa en la figura 5.16.

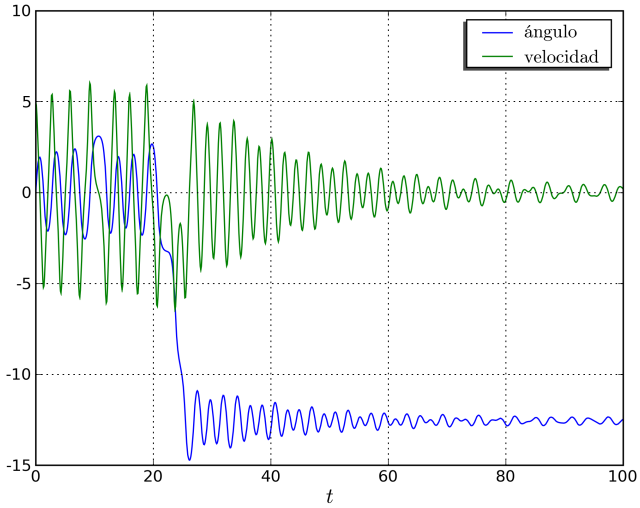


Figura 5.16: Péndulo perturbado: solución obtenida con $N = 1000$ particiones.

De hecho, el problema perturbado con una fuerza externa es terriblemente sensitivo a la elección de las condiciones iniciales. En la figura 5.17 se representa la variación del ángulo para distintos valores cercanos de la velocidad inicial. Como puede obser-

varse, aunque el comportamiento del sistema está determinado por un sistema de ecuaciones diferenciales, es difícil predecir el comportamiento de la solución a largo plazo.

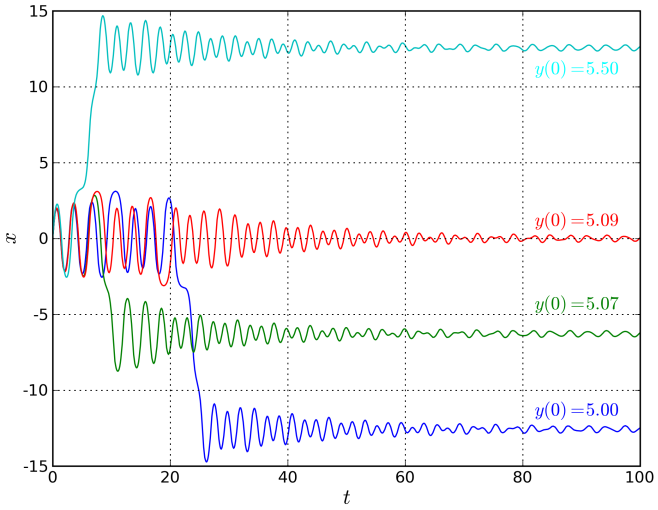


Figura 5.17: Péndulo perturbado: componente x de las soluciones obtenidas con distintas velocidades iniciales.

CAPÍTULO

6

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONTORNO

6.1. Introducción

En este tema nos centraremos en el desarrollo de métodos numéricos para la resolución de problemas de contorno, de la forma

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

En los métodos estudiados en el tema anterior para problemas de valor inicial, la solución numérica se construía de forma recursiva: a partir del valor aproximado y_k en el nodo x_k, se calcula el valor aproximado y_{k+1} en el siguiente nodo x_{k+1}; este proceso se repite hasta llegar al final del intervalo donde queremos resolver la ecuación. El enfoque para problemas de contorno es distinto: la solución numérica va a venir dada como solución de un sistema de ecuaciones, cuyo tamaño dependerá del número de nodos de la partición.

Presentaremos dos métodos fundamentales para el estudio de problemas de contorno: el *método de diferencias finitas* y el *método de elementos finitos*. El método de diferencias finitas se basa en aproximar las derivadas que aparecen en la ecuación dife-

rencial mediante fórmulas adecuadas en cada nodo. El método de elementos finitos se construye a partir de la denominada *formulación variacional* del problema de contorno, y ofrece mayor adaptabilidad que el método de diferencias finitas a la hora de estudiar fenómenos complejos. En la actualidad, el método de elementos finitos es ampliamente utilizado para resolver problemas científicos y técnicos: cálculo de estructuras, aerodinámica de vehículos, interacciones fluido-estructura, procesamiento de imágenes médicas, optimización de formas, etc.

6.2. Método de diferencias finitas

Uno de los métodos básicos para la resolución numérica de problemas de contorno es el conocido como *método de diferencias finitas*, que estudiaremos en esta sección. Por simplicidad, nos centraremos en el estudio numérico de un problema lineal de la forma

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in [a,b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

Comencemos construyendo una partición del intervalo $[a,b]$ de la siguiente forma:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b,$$

con $x_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \ldots, N$, siendo $h = \frac{b-a}{N}$ el paso de malla. Los puntos $x_1, \ldots, x_{N-1}$ son los *nodos interiores* de la partición. Evaluando la ecuación diferencial en cada nodo interior, se obtiene:

$$y''(x_j) + p_j y'(x_j) + q_j y(x_j) = r_j, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

donde, por simplicidad, hemos definido $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$ y $r_j = r(x_j)$.

Las derivadas de $y(x)$ en cada nodo x_j pueden aproximarse mediante las siguientes fórmulas:

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h}, \qquad y''(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2},$$

que son las diferencias finitas que dan nombre al método (figura 6.1).

Observación. Veamos de dónde surgen las fórmulas anteriores. En primer lugar, notemos que $y'(x_j)$ no es más que la pendiente de la recta tangente a la curva solución en el punto $(x_j, y(x_j))$. Podemos aproximar dicha pendiente de varias formas:

- Como la pendiente m_+ de la recta que pasa por $(x_j, y(x_j))$ y $(x_{j+1}, y(x_{j+1}))$:

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} \equiv m_+.$$

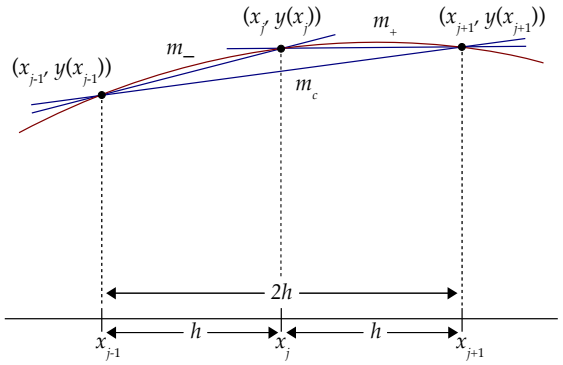


Figura 6.1: Aproximaciones de la derivada de $y(x)$ en el punto x_j.

- Como la pendiente m_- de la recta que pasa por $(x_j, y(x_j))$ y $(x_{j-1}, y(x_{j-1}))$:

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h} \equiv m_-.$$

- Como la pendiente m_c de la recta que pasa por $(x_{j+1}, y(x_{j+1}))$ y $(x_{j-1}, y(x_{j-1}))$:

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}} = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1})}{2h} \equiv m_c.$$

  Claramente, m_c es la media de los valores m_+ y m_-.

Las aproximaciones m_+ y m_- se denominan *descentradas*, mientras que m_c es una aproximación *centrada*. Puede probarse que, en general, la aproximación centrada es más precisa que cualquiera de las dos descentradas.

Por otra parte, la segunda derivada en x_j se aproxima de la siguiente forma:

$$y''(x_j) \approx \frac{y'(x_j)^+ - y'(x_j)^-}{h},$$

donde $y'(x_j)^\pm$ son aproximaciones laterales de la primera derivada en x_j. Tomando $m_+ \approx y'(x_j)^+$ y $m_- \approx y'(x_j)^-$, obtenemos:

$$y''(x_j) \approx \frac{m_+ - m_-}{h} = \frac{\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} - \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}}{h} = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})}{h^2},$$

que es la fórmula buscada. □

Sustituyendo las expresiones para las derivadas en las ecuaciones anteriores y cambiando los valores exactos $y(x_j)$ por valores aproximados y_j, resulta:

$$\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}+p_j\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}+q_jy_j=r_j,\quad j=1,\dots,N-1.$$

Nótese que los valores en los extremos del intervalo son conocidos, gracias a las condiciones de contorno:

$$y_0=y(x_0)=y(a)=\alpha,\qquad y_N=y(x_N)=y(b)=\beta.$$

En resumen, hemos construido un sistema lineal de $N-1$ ecuaciones con $N-1$ incógnitas, a saber, $\{y_1,y_2,\dots,y_{N-1}\}$. Reagrupando, el sistema puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases}\left(\frac{h}{2}p_j-1\right)y_{j-1}+(2-h^2q_j)y_j+\left(-\frac{h}{2}p_j-1\right)y_{j+1}=-h^2r_j,\quad j=1,2,\dots,N-1,\\ y_0=\alpha,\\ y_N=\beta.\end{cases}$$

La solución del sistema nos proporciona un conjunto de aproximaciones a los valores de la solución exacta en cada uno de los nodos interiores: $y_j\approx y(x_j)$.

Notemos que todas las ecuaciones anteriores poseen la misma estructura, a excepción de la primera y la última. En efecto, para $j=1$ se tiene que

$$\left(\frac{h}{2}p_1-1\right)\cancel{y_0}^{\alpha}+(2-h^2q_1)y_1+\left(-\frac{h}{2}p_1-1\right)y_2=-h^2r_1,$$

de donde

$$(2-h^2q_1)y_1+\left(-\frac{h}{2}p_1-1\right)y_2=-h^2r_1+\alpha\left(1-\frac{h}{2}p_1\right),$$

mientras que para $j=N-1$ se deduce, de forma análoga:

$$\left(\frac{h}{2}p_{N-1}-1\right)y_{N-2}+(2-h^2q_{N-1})y_{N-1}=-h^2r_{N-1}+\beta\left(1+\frac{h}{2}p_{N-1}\right).$$

Podemos escribir el sistema lineal en forma matricial:

$$AY=B,$$

donde

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_j\\\vdots\\y_{N-1}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-h^2r_1+\alpha\left(1-\frac{h}{2}p_1\right)\\-h^2r_2\\\vdots\\-h^2r_j\\\vdots\\-h^2r_{N-1}+\beta\left(1+\frac{h}{2}p_{N-1}\right)\end{pmatrix},$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 2-h^2q_1 & -\frac{h}{2}p_1-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h}{2}p_2-1 & 2-h^2q_2 & -\frac{h}{2}p_2-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \frac{h}{2}p_j-1 & 2-h^2q_j & -\frac{h}{2}p_j-1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{h}{2}p_{N-2}-1 & 2-h^2q_{N-2} & -\frac{h}{2}p_{N-2}-1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \frac{h}{2}p_{N-1}-1 & 2-h^2q_{N-1} \end{pmatrix}$$

Como vemos, la matriz A tiene estructura *tridiagonal*. Este tipo de matrices tiene innumerables ventajas desde un punto de vista numérico a la hora de resolver el sistema lineal.

Observación. La resolución numérica de sistemas lineales constituye una rama fundamental del Análisis Numérico, con importantes aplicaciones prácticas. Las técnicas empleadas se salen del ámbito de este curso, por lo que no entraremos en más detalles. □

Observación. Cuando se consideran condiciones de contorno de tipo Neumann, es decir, $y'(a) = \alpha$ e $y'(b) = \beta$, es necesario añadir las ecuaciones correspondientes a $j = 0$ y $j = N$, y usar discretizaciones adecuadas para las derivadas en las condiciones de contorno. □

Ejemplo 6.1. Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - y = x^2 + 1, & x \in [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = -3 - x^2 + \frac{4e-3}{e^2-1}e^x - \frac{4e-3e^2}{e^2-1}e^{-x}.$$

Dividamos el intervalo $[0,1]$ en cuatro subintervalos; de este modo, $N = 4$, el paso de malla es $h = \frac{1}{4}$ y los nodos de la partición son $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = 1$. Evaluando la ecuación diferencial en los nodos interiores, resulta:

$$y''(x_j) - y(x_j) = x_j^2 + 1, \quad j = 1,2,3.$$

A continuación, aproximamos mediante diferencias finitas:

$$\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}-y_j=x_j^2+1,\quad j=1,2,3,$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno $y_0=y(x_0)=0$ e $y_4=y(x_4)=0$, podemos escribir las ecuaciones anteriores del siguiente modo:

$$\begin{cases}\dfrac{y_2-2y_1+\cancelto{0}{y_0}}{h^2}-y_1=x_1^2+1\\[2ex]\dfrac{y_3-2y_2+y_1}{h^2}-y_2=x_2^2+1\\[2ex]\dfrac{\cancelto{0}{y_4}-2y_3+y_2}{h^2}-y_3=x_3^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2+h^2)y_1-y_2=-h^2(x_1^2+1)\\-y_1+(2+h^2)y_2-y_3=-h^2(x_2^2+1)\\-y_2+(2+h^2)y_3=-h^2(x_3^2+1)\end{cases}$$

que en forma matricial se expresan como

$$\begin{pmatrix}2+h^2 & -1 & 0\\ -1 & 2+h^2 & -1\\ 0 & -1 & 2+h^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=-h^2\begin{pmatrix}x_1^2+1\\x_2^2+1\\x_3^2+1\end{pmatrix}.$$

La solución de dicho sistema, una vez sustituidos los valores de h y de los nodos, es:

$$y_1\approx -0{,}102151,\quad y_2\approx -0{,}144281,\quad y_3=-0{,}117303.$$

En la figura 6.2 se representan la solución exacta y los valores aproximados obtenidos. Dicha figura se ha realizado con el siguiente código Sage:

```
sage: #
sage: ### Me'todo de diferencias finitas ###
sage: #
sage: # Ecuacio'n: y''+p(x)y'+q(x)y=r(x), a<x<b.
sage: # Condiciones de contorno de tipo Dirichlet:
sage: # y(a)=alpha, y(b)=beta.
sage: #
sage: # Datos del problema
sage: #
sage: a = 0. # extremo inferior del intervalo
sage: b = 1. # extremo superior del intervalo
sage: #
sage: N = 4 # nu'mero de particiones
sage: #
sage: p(x) = 0. # coeficiente de y'
sage: q(x) = -1. # coeficiente de y
sage: r(x) = x^2+1. # te'rmino independiente
sage: #
sage: alpha = 0. # c. contorno izquierda
sage: beta = 0. # c. contorno derecha
sage: #
sage: ### Implementacio'n del me'todo ###
sage: #
```

```
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: #
sage: X = vector([a+j*h for j in range(N+1)]) # mallado
sage: Y = vector([0. for j in range(N+1)]) # solucio'n
sage: #
sage: # condiciones de contorno
sage: Y[0] = alpha
sage: Y[N] = beta
sage: #
sage: # te'rmino independiente
sage: B = vector([(-h^2)*r(X[j+1]) for j in range(N-1)])
sage: B[0] += alpha*(1-0.5*h*p(X[1]))
sage: B[N-2] += beta*(1+0.5*h*p(X[N-1]))
sage: #
sage: # matriz del sistema
sage: A = matrix(RR, N-1, N-1)
sage: #
sage: for j in range(1, N-1):
          A[j-1, j-1] = 2.-q(X[j])*h^2 # diagonal
          A[j-1, j] = -1.-0.5*h*p(X[j]) # superdiagonal
          A[j, j-1] = -1.+0.5*h*p(X[j]) # subdiagonal
sage: A[N-2, N-2] = 2.-q(X[N-1])*h^2 # u'ltimo elemento de la diagonal
sage: #
sage: # solucio'n del sistema lineal
sage: sol = A.inverse()*B # y=A^(-1)*B
sage: #
sage: # actualizacio'n del vector y
sage: for j in range(0, N-1):
          Y[j+1] = sol[j]
sage: #
sage: ################################
sage: #
sage: # dibujamos los puntos
sage: sol = zip(X, Y)
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='aprox.')
sage: # y los unimos con segmentos
sage: fig1 += line(sol)
sage: #
sage: ### Comparacio'n con la solucio'n exacta ###
sage: y = function('y', x)
sage: ec = diff(y, x, 2) + p(x)*diff(y, x) + q(x)*y == r(x)
sage: sol = desolve(ec, y, ics=[a, alpha, b, beta])
sage: #
sage: fig2 = plot(sol, a, b, color='red', legend_label='exacta')
sage: show(fig1 + fig2)
```

Como disponemos de la solución exacta, es posible determinar el error $e_j = |y(x_j) - y_j|$ cometido en cada uno de los nodos:

$$e_1 \approx 0{,}001366, \quad e_2 \approx 0{,}001853, \quad e_3 \approx 0{,}001443.$$

Por tanto, el error global será $e = \text{máx}(e_1, e_2, e_3) \approx 0{,}001853$.

Con Sage, haríamos lo siguiente:

```
sage: # Ca'lculo de los errores en los nodos interiores
sage: err = [abs(Y[j]-sol(X[j])) for j in range(1, N)]; err
[0.00136648039024440, 0.00185314651061488, 0.00144315391661615]
```

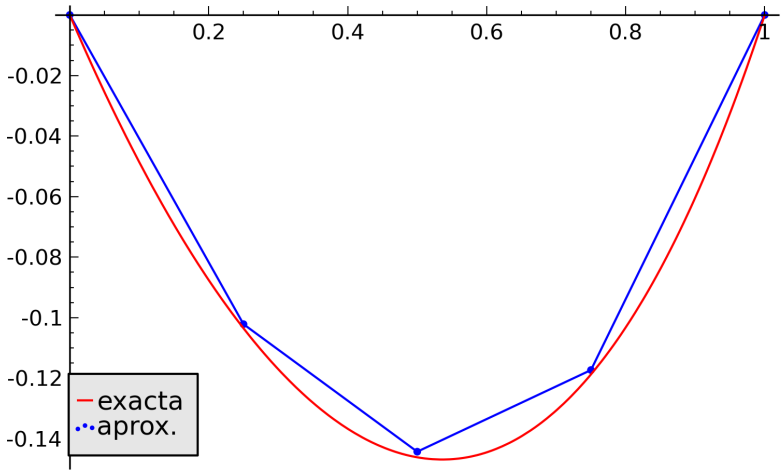


Figura 6.2: Ejemplo 6.1: solución exacta y valores aproximados.

y después

```
sage: # Error global
sage: max(err)
0.00185314651061488
```

para determinar el error global. □

6.3. Aproximación variacional

En esta sección vamos a introducir las ideas básicas relativas a la *formulación variacional* de un problema de contorno. Como veremos, esta formulación será la base que nos permitirá definir el *método de elementos finitos*.

Consideremos un problema de contorno lineal de la forma

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $q(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en $[0,1]$. En este contexto es habitual denotar por u a la variable dependiente en lugar de y.

Observación. Si las condiciones de contorno son del tipo $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$, basta con hacer el cambio $w(x) = u(x) - \alpha(1-x) - \beta x$ para pasar a un problema equivalente con condiciones de contorno $w(0) = 0$, $w(1) = 0$. Asimismo, el cambio $w(x) = u(a + (b-a)x)$ permite considerar el problema en un intervalo arbitrario $[a,b]$. Por otra parte, el añadir un término de la forma $p(x)u'(x)$ a la ecuación no

introduce dificultades matemáticas adicionales en la deducción del método de elementos finitos, por lo que no lo consideraremos en aras de la simplicidad. □

Observación. Las condiciones de contorno del tipo $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ se denominan *condiciones de tipo Dirichlet*: en ellas se impone el valor que ha de tener la solución en los extremos del dominio $[0,1]$. Otro tipo habitual de condiciones de contorno son las *condiciones de tipo Neumann*, en las que se especifican los valores de la derivada de la solución en los extremos: $u'(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$. Ambos tipos de condiciones de contorno pueden combinarse, dando lugar a *condiciones de tipo mixto*; por ejemplo, $u(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$.

Aunque en esta sección sólo estudiaremos el método de elementos finitos para problemas de tipo Dirichlet, dicho método puede adaptarse para resolver problemas de tipo Neumann o de tipo mixto. □

Sea $u \in C^2([0,1])$ solución del problema (1): diremos que u es una *solución fuerte*. Multipliquemos la ecuación diferencial por una función arbitraria $v \in C^1([0,1])$ e integremos en el intervalo $[0,1]$:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Supongamos además que $v(0) = v(1) = 0$ e integremos por partes la primera integral:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \big[u'(x)v(x)\big]_0^1 = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

De esta forma, obtenemos la *ecuación variacional* asociada al problema (1):

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,$$

para cada función $v \in C^1([0,1])$ tal que $v(0) = v(1) = 0$.

Es importante notar que basta con suponer $u \in C^1([0,1])$ para que la ecuación anterior tenga sentido; de hecho es suficiente con que las funciones u y v sean de clase C^1 a trozos y verifiquen las condiciones de contorno. Estos hechos motivan la introducción del espacio V formado por todas las funciones v de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ que verifican las condiciones de contorno $v(0) = v(1) = 0$. Notemos que, en particular, la solución u del problema (1) pertenece a V.

La *formulación variacional* o *formulación débil* del problema (1) consiste en hallar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V. \tag{2}$$

En tal caso, diremos que $u \in V$ es una *solución débil* o *variacional*; notemos que las condiciones de contorno $u(0) = u(1) = 0$ se verifican de forma automática al pertenecer u al espacio V.

La principal dificultad que nos encontramos al intentar resolver la ecuación variacional (2) está en el hecho de que el espacio vectorial V es un espacio de dimensión *infinita*; esto hace que no sea factible una implementación directa en el ordenador. El *método de aproximación variacional* o *método de Galerkin* se basa en considerar un subespacio V_h de V de dimensión finita, y a continuación aproximar la solución u de (2) por la solución $u_h \in V_h$ de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u_h(x)v_h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx, \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{3}$$

Diremos que V_h es el espacio de *funciones test*. La notación V_h hace referencia a que el espacio va a depender del paso de malla elegido: mientras menor sea éste, mejor será la aproximación de la solución.

Supongamos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una base del espacio V_h, donde n es su dimensión. En tal caso, cualquier elemento $v_h \in V_h$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de dicha base:

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i\varphi_i(x), \quad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo en (3), resulta:

$$\int_0^1 u_h'(x)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\varphi_i'(x)\right)dx + \int_0^1 q(x)u_h(x)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\varphi_i(x)\right)dx = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\varphi_i(x)\right)dx,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 u_h'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 q(x)u_h(x)\varphi_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\left(\int_0^1 u_h'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u_h(x)\varphi_i(x)\,dx\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Al ser los coeficientes $\{v_1, \ldots, v_n\}$ arbitrarios, deducimos que la ecuación (3) es equivalente a

$$\int_0^1 u_h'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u_h(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1, \ldots, n,$$

es decir, basta con que la ecuación (3) se verifique para los elementos φ_i de la base.

Escribamos ahora la solución buscada u_h en la base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j\varphi_j(x), \quad u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y razonando como antes, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} u_j \int_0^1 q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1,\dots,n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \right) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1,\dots,n.$$

Si denotamos

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad f_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

podemos escribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = f_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Hemos obtenido así un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas (a saber, los coeficientes u_i de la solución u_h). En forma matricial, dicho sistema se escribe

$$AU = F,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema nos permitirá construir la solución del problema discreto (3). La matriz A se denomina *matriz de rigidez* y F es el *vector de cargas*[1], aunque en teoría no tengan significado físico alguno.

Observación. La solución $U = (u_1,\dots,u_n)^T$ del sistema lineal permite construir la solución numérica de la forma

$$u_h(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \cdots + u_n\varphi_n(x).$$

En este caso, dicha solución numérica es una función y no un conjunto de valores aproximados, como sucedía en el método de diferencias finitas. Podemos por tanto usar $u_h(x)$ para aproximar la solución del problema de contorno en cualquier punto del intervalo $[0,1]$. □

[1]La terminología proviene de la Mecánica de Sólidos, que es el área donde se desarrolló el método de elementos finitos en la década de los cincuenta del pasado siglo, concretamente en la industria aeronáutica.

En resumen, hemos visto cómo la solución del problema variacional (2) puede aproximarse mediante la solución de un problema discreto (3), cuyo cálculo se reduce a la resolución de un sistema lineal. En la siguiente sección veremos cómo elegir los elementos φ_i de la base de forma adecuada para que el sistema pueda resolverse de la forma más eficiente posible.

6.4. Método de elementos finitos

El *método de elementos finitos* se basa en aproximar, mediante el método de Galerkin, la solución variacional del problema (1) haciendo una elección adecuada de los elementos del espacio de discretización V_h. Dicha elección se realiza intentando que la matriz del sistema resultante tenga una estructura lo más sencilla posible.

Observación. En las aplicaciones prácticas, las matrices que resultan de realizar el proceso de discretización detallado en la sección anterior pueden tener miles, o incluso millones de elementos. La resolución de sistemas de tales tamaños requieren el uso de ordenadores de gran potencia, así como la aplicación de técnicas matemáticas adecuadas. □

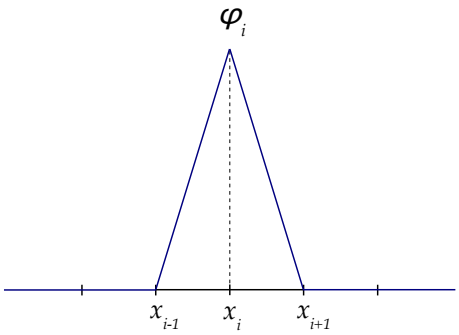


Figura 6.3: Gráfica de la función de base $\varphi_i(x)$.

Consideremos una discretización del intervalo $[0,1]$,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1,$$

con paso de malla $h = \frac{1}{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, N-1$, consideremos la función de base $\varphi_i(x)$ definida como

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

cuya gráfica se representa en la figura 6.3. Cada $\varphi_i(x)$ es una función de clase C^1 a trozos, cuya derivada es

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\ -\dfrac{1}{h} & \text{si } x_i < x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que las funciones $\varphi_i(x)$ y $\varphi_i'(x)$ se anulan fuera del intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}).

Puede demostrarse que la familia de funciones $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}\}$ constituyen una base del subespacio vectorial V_h formado por las funciones continuas y lineales a trozos en $[0,1]$ que se anulan en los extremos $x = 0$ y $x = 1$; en particular, la dimensión de V_h es $n = N - 1$.

Observación. Para condiciones de contorno de tipo Neumann es necesario añadir dos funciones de base adicionales, $\varphi_0(x)$ y $\varphi_N(x)$, para imponer las condiciones de contorno en cada uno de los extremos del intervalo. Asimismo, el espacio de funciones test V_h debe modificarse de manera adecuada. □

A continuación vamos a calcular los coeficientes a_{ij} de la matriz A, así como los términos independientes f_i. Por simplicidad, a partir de ahora supondremos que las funciones $q(x)$ y $f(x)$ son constantes: $q(x) \equiv q$, $f(x) \equiv f$.

Observación. Cuando las funciones $q(x)$ y $f(x)$ no son constantes, es necesario utilizar fórmulas de cuadratura para aproximar numéricamente las integrales que aparecen en la definición de los coeficientes a_{ij} y f_i. □

Fijado un subíndice arbitrario i, notemos que $\varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0$ si $j \neq i-1, i, i+1$, ya que en tal caso los conjuntos donde $\varphi_i(x)$ y $\varphi_j(x)$ no se anulan no tienen puntos en común (véase la figura 6.4); lo mismo sucede para el producto de las derivadas. Por otro lado, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_i(x)\,dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)^2 dx = \frac{2h}{3}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $x_{i-1} = x_i - h$ y $x_{i+1} = x_i + h$. De forma similar, se obtienen las igualdades

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x_i - x}{h} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h}\,dx = \frac{h}{6},$$

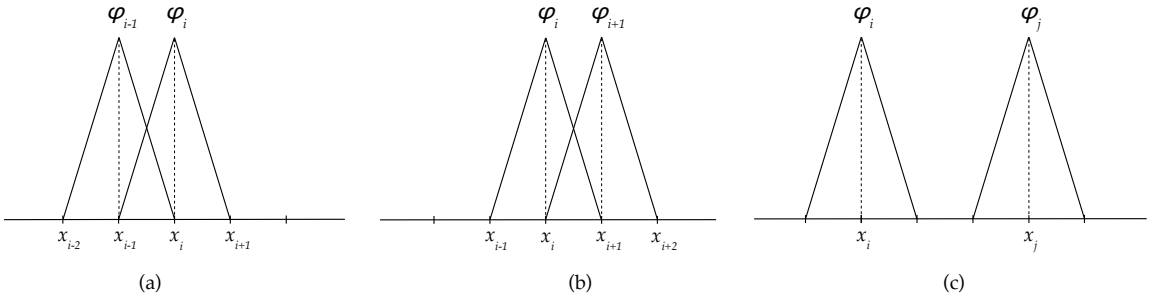


Figura 6.4: (a) $\varphi_i\varphi_{i-1} \neq 0$ en $[x_{i-1}, x_i]$; (b) $\varphi_i\varphi_{i+1} \neq 0$ en $[x_i, x_{i+1}]$; (c) $\varphi_i\varphi_j \equiv 0$ si $j \neq i-1$, $j \neq i$ o $j \neq i+1$.

y

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{h} \cdot \frac{x_{i+1} - x}{h}\,dx = \frac{h}{6}.$$

Razonando de manera análoga, se deducen las siguientes expresiones:

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\,dx = \frac{2}{h}, \quad \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}.$$

Finalmente, deducimos las fórmulas para los coeficientes a_{ij}:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{h} + \dfrac{2}{3}qh & \text{si } j = i, \\ -\dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{6}qh & \text{si } j = i-1 \text{ o } j = i+1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte, notemos que

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h}\,dx = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h,$$

lo que implica que todos los coeficientes f_i tienen la siguiente forma:

$$f_i = fh, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

A partir de los resultados obtenidos, podemos escribir el sistema lineal que define el método de elementos finitos como sigue:

$$\begin{pmatrix} 2+\frac{2}{3}qh^2 & -1+\frac{1}{6}qh^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1+\frac{1}{6}qh^2 & 2+\frac{2}{3}qh^2 & -1+\frac{1}{6}qh^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1+\frac{1}{6}qh^2 & 2+\frac{2}{3}qh^2 & -1+\frac{1}{6}qh^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1+\frac{1}{6}qh^2 & 2+\frac{2}{3}qh^2 & -1+\frac{1}{6}qh^2 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1+\frac{1}{6}qh^2 & 2+\frac{2}{3}qh^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f \\ h^2 f \\ h^2 f \\ \vdots \\ h^2 f \\ h^2 f \end{pmatrix}.$$

La matriz A es simétrica y tridiagonal, lo que la hace especialmente adecuada a la hora de resolver numéricamente el sistema lineal.

Ejemplo 6.2. Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 2, \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

que tiene como solución exacta la función

$$u(x) = -\frac{2}{1+e}(e^x + e^{1-x}) + 2.$$

Para construir la formulación variacional del problema, multiplicamos la ecuación dife-rencial por una función arbitraria $v(x)$, que sea de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ y verifique $v(0) = v(1) = 0$, y a continuación integramos en $[0,1]$:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 2v(x)\,dx.$$

Integrando por partes el primer sumando,

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx,$$

y teniendo en cuanta que $v(0) = v(1) = 0$, resulta:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

De esta forma, deducimos la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 2v(x)\,dx.$$

Definamos V como el espacio vectorial formado por todas las funciones $v(x)$ de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ y que verifican $v(0) = v(1) = 0$. La formulación variacional del problema es entonces la siguiente: hallar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 2v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V.$$

El siguiente paso consiste en discretizar la ecuación variacional. Para ello, consideremos una partición del intervalo $[0,1]$ con $N = 4$; de esta forma, el paso de malla

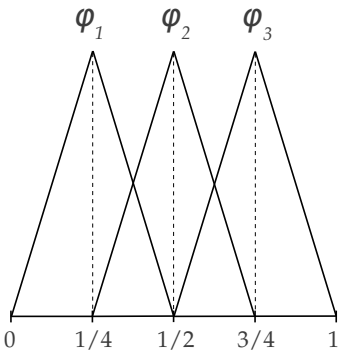


Figura 6.5: Funciones de base para $h = \frac{1}{4}$.

es $h = \frac{1}{4}$ y los nodos vienen dados por $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = 1$. Las correspondientes funciones de base $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ se representan en la figura 6.5.

Sea V_h el subespacio vectorial de V formado por todas las funciones $v_h(x)$ de la forma

$$v_h(x) = v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + v_3\varphi_3(x),$$

siendo $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ valores arbitrarios. El espacio V_h está formado por todas las funciones poligonales que se anulan en $x = 0$ y $x = 1$, y cuyos posibles puntos de no derivabilidad se localizan en los nodos internos $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = \frac{3}{4}$.

La formulación variacional discreta del problema es la siguiente: determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)v_h(x)\,dx = \int_0^1 2v_h(x)\,dx, \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

Tomemos un elemento arbitrario $v_h(x) = v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + v_3\varphi_3(x)$ en V_h y sustituyámoslo en la ecuación variacional:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 u_h'(x)(v_1\varphi_1'(x) + v_2\varphi_2'(x) + v_3\varphi_3'(x))\,dx + \\
&\int_0^1 u_h(x)(v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + v_3\varphi_3(x))\,dx \\
&= \int_0^1 2(v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + v_3\varphi_3(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Reagrupando los términos, resulta:

$$\begin{aligned}
&v_1\left(\int_0^1 u_h'(x)\varphi_1'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_1(x)\,dx\right) + \\
&v_2\left(\int_0^1 u_h'(x)\varphi_2'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_2(x)\,dx\right) + \\
&v_3\left(\int_0^1 u_h'(x)\varphi_3'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_3(x)\,dx\right) \\
&= v_1\int_0^1 2\varphi_1(x)\,dx + v_2\int_0^1 2\varphi_2(x)\,dx + v_3\int_0^1 2\varphi_3(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Tomemos ahora $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = 0$; en tal caso, de la igualdad anterior se deduce:

$$\int_0^1 u_h'(x)\varphi_1'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 2\varphi_1(x)\,dx.$$

Para $v_1 = v_3 = 0$ y $v_2 = 1$ se obtiene la ecuación

$$\int_0^1 u_h'(x)\varphi_2'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_2(x)\,dx = \int_0^1 2\varphi_2(x)\,dx,$$

mientras que

$$\int_0^1 u_h'(x)\varphi_3'(x)\,dx + \int_0^1 u_h(x)\varphi_3(x)\,dx = \int_0^1 2\varphi_3(x)\,dx$$

resulta al elegir $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 = 1$.

Como la solución buscada u_h es un elemento de V_h, podemos escribirla en la forma

$$u_h(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x),$$

donde $\{u_1, u_2, u_3\}$ son incógnitas a determinar. Sustituyendo la expresión de u_h en la primera de las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (u_1\varphi_1'(x) + u_2\varphi_2'(x) + u_3\varphi_3'(x))\varphi_1'(x)\,dx + \\
&\int_0^1 (u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x))\varphi_1(x)\,dx \\
&= \int_0^1 2\varphi_1(x)\,dx,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&u_1\left(\int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx\right) + \\
&u_2\left(\int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx\right) + \\
&u_3\left(\int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_3'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_3(x)\,dx\right) \\
&= \int_0^1 2\varphi_1(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Si definimos

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \qquad f_i = \int_0^1 2\varphi_i(x)\,dx,$$

la expresión anterior puede escribirse como:

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = f_1.$$

De manera totalmente análoga, pueden deducirse las ecuaciones

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = f_2$$

y

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 = f_3.$$

Los coeficientes a_{ij} y f_i se determinan explícitamente:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \tfrac{49}{24},\ a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = -\tfrac{95}{96},\ a_{13} = a_{31} = 0,\ f_1 = f_2 = f_3 = \tfrac{1}{8}.$$

En resumen, las incógnitas $\{u_1, u_2, u_3\}$ se obtienen como solución de un sistema lineal de tres ecuaciones, que en forma matricial se escribe como

$$\begin{pmatrix} \frac{49}{24} & -\frac{95}{96} & 0 \\ -\frac{95}{96} & \frac{49}{24} & -\frac{95}{96} \\ 0 & -\frac{95}{96} & \frac{49}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Obviamente, dicho sistema corresponde al caso general con $q = 1$ y $f = 2$.

La solución del sistema viene dada por

$$u_1 \approx 0{,}171462, \quad u_2 \approx 0{,}227438, \quad u_3 \approx 0{,}171462.$$

El error $e_i = |u(x_i) - u_i|$ cometido en cada nodo interior puede determinarse en este caso, ya que conocemos la solución exacta:

$$e_1 \approx 0{,}000815, \quad e_2 \approx 0{,}001076, \quad e_3 \approx 0{,}000815.$$

El error global cometido es pues $e = \max(e_1, e_2, e_3) \approx 0{,}001076$.

Los resultados obtenidos se representan en la figura 6.6, que ha sido generada con el siguiente código Sage:

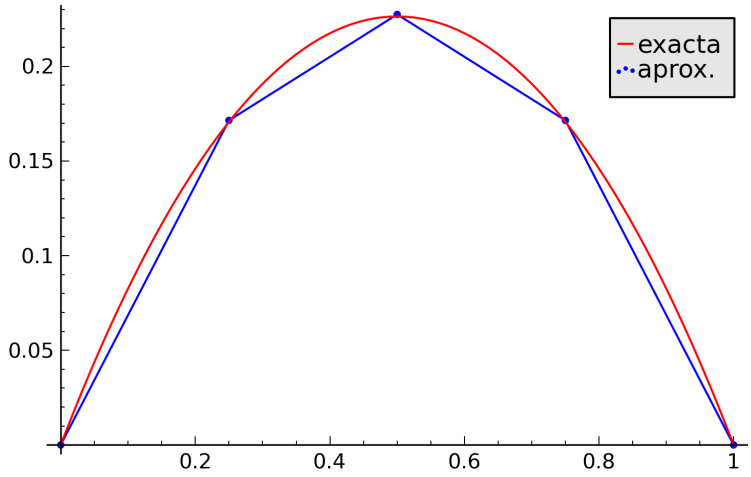


Figura 6.6: Ejemplo 6.2: solución exacta y valores aproximados.

```
sage: #
sage: ### Me'todo de elementos finitos ###
sage: #
sage: # Ecuacio'n: -u''+qu=f(x), a<x<b.
sage: # Condiciones de contorno de tipo Dirichlet:
sage: # u(a)=0, u(b)=0.
sage: #
sage: #
sage: # Datos del problema
sage: #
sage: a = 0. # extremo inferior del intervalo
sage: b = 1. # extremo superior del intervalo
sage: #
sage: N = 4 # nu'mero de particiones
sage: #
sage: q = 1. # coeficiente de u
sage: f(x) = 2. # te'rmino independiente
sage: #
sage: alpha = 0. # c. contorno izquierda
sage: beta = 0. # c. contorno derecha
sage: #
sage: ### Implementacio'n del me'todo ###
sage: #
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: #
sage: X = vector([a+j*h for j in range(N+1)]) # mallado
sage: U = vector([0. for i in range(N+1)]) # solucio'n
sage: #
sage: # condiciones de contorno
sage: U[0] = alpha
sage: U[N] = beta
sage: #
sage: # te'rmino independiente
sage: F = vector([0. for i in range(N-1)])
sage: for i in range(1, N):
          aux = integral(f(x)*(x-X[i-1])/h, x, X[i-1], X[i])
```

```
            aux += integral(f(x)*(X[i+1]-x)/h, x, X[i], X[i+1])
            F[i-1] = h*aux
sage: #
sage: # matriz del sistema
sage: A = matrix(RR, N-1, N-1)
sage: #
sage: for i in range(1, N-1):
            A[i-1, i-1] = 2.+(2/3)*q*h^2 # diagonal
            A[i-1, i] = -1.+(1/6)*q*h^2 # superdiagonal
            A[i, i-1] = -1.+(1/6)*q*h^2 # subdiagonal
sage: A[N-2, N-2] = 2.+(2/3)*q*h^2 # u'ltimo elemento de la diagonal
sage: #
sage: # solucio'n del sistema lineal
sage: sol = A.inverse()*F # U=A^(-1)*F
sage: #
sage: # actualizamos el vector U
sage: for i in range(N-1):
            U[i+1] = sol[i]
sage: #
sage: ################################
sage: #
sage: # dibujamos los puntos
sage: sol = zip(X, U)
sage: fig1 = list_plot(sol, color='blue', legend_label='aprox.')
sage: # y los unimos con segmentos
sage: fig1 += line(sol)
sage: #
sage: # Comparacio'n con la solucio'n exacta
sage: u = function('u', x)
sage: ec = -diff(u, x, 2) + q*u == f(x)
sage: sol = desolve(ec, u, ics=[a, alpha, b, beta])
sage: #
sage: fig2 = plot(sol, a, b, color='red', legend_label='exacta')
sage: show(fig1 + fig2)
```

Por último, calculamos los errores cometidos en cada nodo:

```
sage: # Ca'lculo de los errores en los nodos interiores
sage: err = [abs(U[j]-sol(X[j])) for j in range(1, N)]; err
[0.000815468791417362, 0.00107565359683126, 0.000815467679347037]
```

así como el error global:

```
sage: # Error global
sage: max(err)
0.00107565359683126
```

□

6.5. Algunos comentarios

Los métodos numéricos estudiados en las secciones precedentes pueden aplicarse para la resolución de problemas de contorno *no lineales*, de la forma

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

o con otros tipos de condiciones de contorno. En tal caso, la solución numérica se determina a partir de la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, que debe resolverse mediante técnicas matemáticas apropiadas. El estudio de tales cuestiones queda fuera del alcance de este curso, por lo que no insistiremos más en ellas.

Los problemas que surgen en las aplicaciones prácticas suelen modelizarse mediante *ecuaciones en derivadas parciales*, tanto estacionarias como de evolución (dependientes del tiempo), en dominios bi- o tridimensionales. Tanto el método de diferencias finitas como el de elementos finitos pueden extenderse para resolver problemas de esta índole, siendo el método de elementos finitos el más extendido debido a su mayor flexibilidad y capacidad de adaptación a problemas en dominios complejos. Tanto el estudio teórico de ecuaciones en derivadas parciales como su resolución numérica por el método de elementos finitos requieren de técnicas matemáticas avanzadas, por lo que no entraremos en más detalles.

Existen varios paquetes informáticos profesionales para aplicar el método de elementos finitos, especialmente en las áreas de Cálculo de Estructuras y Mecánica de Fluidos. Queremos mencionar aquí la existencia del programa gratuito de código abierto FreeFem++, que puede descargarse desde la página web `www.freefem.org/ff++/`. Este programa permite resolver diversos tipos de ecuaciones en derivadas parciales, con distintas clases de condiciones de contorno, en dos y tres dimensiones. En la figura 6.7 se muestra un ejemplo de deflexión de una viga tridimensional realizado con FreeFem++.

6.6. Aplicaciones

6.6.1. Deflexión de vigas empotradas

Vamos a estudiar la deformación sufrida por una viga empotrada, con cargas axiales y transversales. Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones (esto es, $y'(x) \approx 0$),

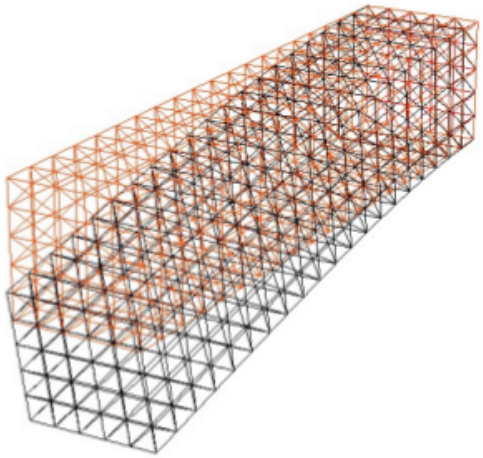


Figura 6.7: Deflexión, debido a su propio peso, de una viga tridimensional empotrada en un extremo.

la deformación sufrida por la viga es solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{Q}{EI}y(x) = \dfrac{M(x)}{EI}, & x \in [0, L], \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 0, \end{cases}$$

siendo Q la carga axial, E el módulo de elasticidad, I el momento de inercia, $M(x)$ el momento flector y L la longitud de la viga. Si suponemos que la carga P está uniformemente distribuida, el momento flector viene dado en este caso por

$$M(x) = \frac{P}{2}x(L - x).$$

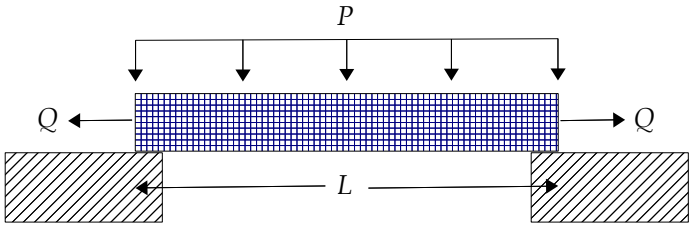


Figura 6.8: Deflexión de una viga empotrada con cargas axiales y transversales: esquema.

En la figura 6.9 se representan los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas al considerar diferentes cargas axiales. Los valores de los parámetros son $L = 2$ m, $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, $I = 7{,}85 \cdot 10^{-9}$ m^4 y $P = 150$; para Q se han tomado los valores 100, 500 y 1000. Los cálculos han sido realizados usando $N = 20$ particiones.

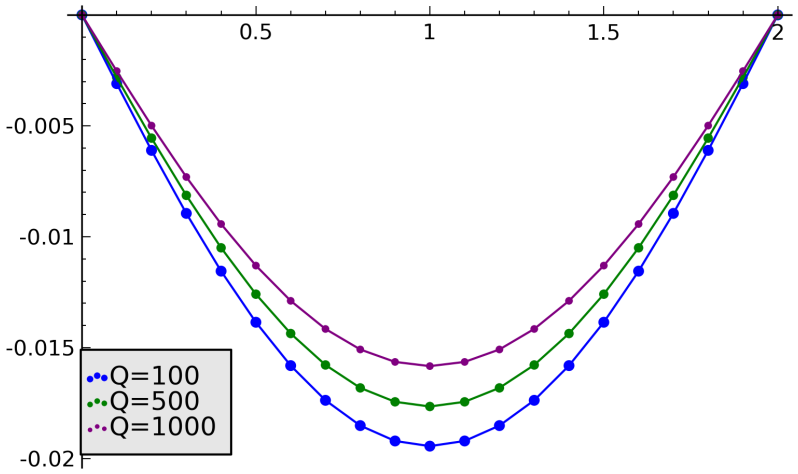


Figura 6.9: Viga empotrada con diferentes cargas axiales.

A continuación se muestra un código Sage para resolver el problema considerado:

```
sage: # Deflexio'n de vigas con cargas axiales y transversales
sage: # ------------------------------------------------------
sage: #
sage: # Ecuacio'n:  y''- Q/(EI)y=M(x)/(EI) en [0, L].
sage: # Condiciones de contorno: y(0)=0, y(L)=0.
sage: #
sage: # Me'todo: diferencias finitas
sage: #
sage: # Datos del problema
sage: #
sage: L = 2. # longitud de la viga
sage: Q = 100. # carga axial
sage: E = 2.e11 # modulo de elasticidad
sage: I = 7.85e-9 # momento de inercia
sage: P = 150. # carga transversal
sage: #
sage: a = 0. # extremo inferior del intervalo
sage: b = L # extremo superior del intervalo
sage: #
sage: N = 20 # nu'mero de particiones
sage: #
sage: p(x) = 0. # coeficiente de y'
sage: q(x) = -Q/(E*I) # coeficiente de y
sage: r(x) = 0.5*P*x*(L-x)/(E*I) # te'rmino independiente
sage: #
sage: alpha = 0. # c. contorno izquierda
sage: beta = 0. # c. contorno derecha
```

```
sage: #
sage: ### Implementacio'n del me'todo ###
sage: #
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: #
sage: X = vector([a+j*h for j in range(N+1)]) # mallado
sage: Y = vector([0. for j in range(N+1)]) # solucio'n
sage: #
sage: # condiciones de contorno
sage: Y[0] = alpha
sage: Y[N] = beta
sage: #
sage: # te'rmino independiente
sage: B = vector([(-h^2)*r(X[j+1]) for j in range(N-1)])
sage: B[0] += alpha*(1-0.5*h*p(X[1]))
sage: B[N-2] += beta*(1+0.5*h*p(X[N-1]))
sage: #
sage: # matriz del sistema
sage: A = matrix(RR, N-1, N-1)
sage: #
sage: for j in range(1, N-1):
          A[j-1, j-1] = 2.-q(X[j])*h^2 # diagonal
          A[j-1, j] = -1.-0.5*h*p(X[j]) # superdiagonal
          A[j, j-1] = -1.+0.5*h*p(X[j]) # subdiagonal
sage: A[N-2, N-2] = 2.-q(X[N-1])*h^2 # u'ltimo elemento de la diagonal
sage: #
sage: # solucio'n del sistema lineal
sage: sol = A.inverse()*B # y=A^(-1)*B
sage: #
sage: # actualizacio'n del vector y
sage: for j in range(0, N-1):
          Y[j+1] = sol[j]
sage: #
sage: ################################
sage: #
sage: # dibujamos los puntos
sage: sol = zip(X, Y)
sage: fig = list_plot(sol)
sage: # los unimos con segmentos
sage: fig += line(sol)
sage: # y mostramos el resultado
sage: show(fig)
```

Para aplicar el método de elementos finitos, reescribimos la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$-u''(x) + q\,u(x) = f(x),$$

donde $u \equiv y$, $q = \frac{Q}{EI}$ y $f(x) = -\frac{M(x)}{EI}$. Como era de esperar, al aplicar el método de elementos finitos se obtienen resultados totalmente análogos a los de la figura 6.9. El código Sage correspondiente es el siguiente:

```
sage: # Deflexio'n de vigas con cargas axiales y transversales
sage: # ------------------------------------------------------
sage: #
sage: # Ecuacio'n:  -u''+ Q/(EI)u=-M(x)/(EI) en [0, L].
sage: # Condiciones de contorno: u(0)=0, u(L)=0.
sage: #
sage: # Me'todo: elementos finitos
```

```
sage: #
sage: # Datos del problema
sage: #
sage: L = 2. # longitud de la viga
sage: Q = 100. # carga axial
sage: E = 2.e11 # modulo de elasticidad
sage: I = 7.85e-9 # momento de inercia
sage: P = 150. # carga transversal
sage: #
sage: a = 0. # extremo inferior del intervalo
sage: b = L # extremo superior del intervalo
sage: #
sage: N = 20 # nu'mero de particiones
sage: #
sage: q = Q/(E*I) # coeficiente de u
sage: r(x) = -0.5*P*x*(L-x)/(E*I) # te'rmino independiente
sage: #
sage: alpha = 0. # c. contorno izquierda
sage: beta = 0. # c. contorno derecha
sage: #
sage: ### Implementacio'n del me'todo ###
sage: #
sage: h = (b-a)/N # paso de malla
sage: #
sage: X = vector([a+j*h for j in range(N+1)]) # mallado
sage: U = vector([0. for i in range(N+1)]) # solucio'n
sage: #
sage: # condiciones de contorno
sage: U[0] = alpha
sage: U[N] = beta
sage: #
sage: # te'rmino independiente
sage: F = vector([0. for i in range(N-1)])
sage: for i in range(1, N):
          aux = integral(f(x)*(x-X[i-1])/h, x, X[i-1], X[i])
          aux += integral(f(x)*(X[i+1]-x)/h, x, X[i], X[i+1])
          F[i-1] = h*aux
sage: #
sage: # matriz del sistema
sage: A = matrix(RR, N-1, N-1)
sage: #
sage: for i in range(1, N-1):
          A[i-1, i-1] = 2.+(2/3)*q*h^2 # diagonal
          A[i-1, i] = -1.+(1/6)*q*h^2 # superdiagonal
          A[i, i-1] = -1.+(1/6)*q*h^2 # subdiagonal
sage: A[N-2, N-2] = 2.+(2/3)*q*h^2 # u'ltimo elemento de la diagonal
sage: #
sage: # solucio'n del sistema lineal
sage: sol = A.inverse()*F # U=A^(-1)*F
sage: #
sage: # actualizamos el vector U
sage: for i in range(N-1):
          U[i+1] = sol[i]
sage: #
sage: ################################
sage: #
sage: # dibujamos los puntos
sage: points = zip(X, U)
sage: fig = list_plot(points)
```

```
sage: # los unimos con segmentos
sage: fig += line(points)
sage: # y mostramos el resultado
sage: show(fig)
```

Nótese que el término independiente no es constante en este caso, por lo que se han calculado numéricamente las integrales correspondientes.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

[1] M. Braun. *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

[2] R.L. Burden, J.D. Faires. *Métodos Numéricos*. Thompson-Paraninfo, 2004.

[3] S.C. Chapra, R.P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw-Hill, 2003.

[4] C.H. Edwards, D.E. Penney. *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*. Prentice Hall, 2000.

[5] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations*. vols. I-II, Springer, 2010.

[6] D. Kincaid, W. Cheney. *Análisis Numérico*. Adisson-Wesley, 1994.

[7] M.L. Krasnov, A.I. Kiseliov, G.I. Makárenko. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. URSS, 2005.

[8] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.

[9] J.H. Mathews, K.D. Fink. *Métodos Numéricos con Matlab*. Prentice-Hall, 2005.

[10] R.K. Nagel, E.B. Saff, A.D. Snider. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Pearson, 2002.

[11] J.H. Saiac. *Méthode des Éléments Finis. Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*. `http://www.cnam.fr/maths/Membres/saiac/polyB4.pdf`

[12] G.F. Simmons, S.G. Krantz. *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Práctica*. McGraw-Hill, 2007.

[13] The Sage Development Team. *Sage Tutorial*. `http://www.sagemath.org/pdf/SageTutorial.pdf`.